REPUBLIKA SLOVENIJA | MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

TŠC Nova Gorica
BIOTEHNIŠKA ŠOLA

Konzorcij biotehniških šol Slovenije

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Polinomi

Mišo Krog

Srednje strokovno izobraževanje: Kmetijski tehnik, tehniki

Modul: MATEMATIKA

Naslov: Polinomi

Gradivo za 3.letnik SSI

Avtor: Mišo Krog

Strokovni recenzent: Janja Barber Rojc, prof. mat.

Lektor: Severin drekonja, dipl. komp.

Šempeter pri Gorici, 2011

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Biotehniška področja, šole za življenje in razvoj (2008-2012).

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Kazalo

Kazalo slik

Definicija

Polinom stopnje n, kjer je $n \in \mathbb{N}$, je realna funkcija realne spremenljivke $(f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ in ima splošen predpis:

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + ax + a_0 \quad a_n \neq 0.}$$

$a_0; a_1; \cdots a_{n-1}; a_n$ so koeficienti polinoma $p(x)$.

Opazimo, da je predpis polinoma predstavljen kot vsota večih členov – monomov, kjer imenujemo naslednje člene:

$a_n x^n$ je vodilni člen, v njem "najdemo":

n - stopnja polinoma,

a_n - vodilni koeficient;

a_0 je prosti člen ali konstantni člen.

Pravimo, da sta dva polinoma enakih stopenj enaka, ko se ujemata v vseh koeficientih.

Polinome definiramo za vsa realna števila $(\forall x \in \mathbb{R})$, prav tako je njihova zaloga vrednosti (pod)množica realnih števil $(p(x) \in \mathbb{R})$.

Po potrebi lahko definiramo polinome tudi kot preslikavo nad množico kompleksnih števil $(f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C})$.

Kje smo polinome že srečali?

Tukaj se ne srečujemo prvič s polinomi, ampak smo z njimi že imeli opravka. Spomnimo se potenčne funkcije $(f(x) = ax^n)$, ki sedaj izgleda kot en člen v predpisu polinoma. Stvar lahko obrnemo tudi malo drugače in povemo, da je polinom sestavljen iz vsote različnih potenčnih funkcij poljubnih stopenj.

Prav tako smo se že veliko ukvarjali s polinomi stopnje $n = 2$ (predpis $a_2x^2 + a_1x + a_0$). Le kdo se ne spomni, da ta predpis ustreza kvadratni funkciji $(f(x) = ax^2 + bx + c)$, le da smo takrat pisali koeficiente $a_2 = 2$, $a_1 = b$, $a_0 = c$.

Tudi polinome stopnje $n = 1$ (predpis: $a_1x + a_0$) že dobro poznamo. To so seveda linearne funkcije $(f(x) = kx + n)$, kjer je $a_1 = k$ in $a_0 = n$.

Za polinome stopnje $n = 0$ (polinomi a_0) pa rečemo, da so to vse konstantne funkcije $(f(x) = c)$, razen za $f(x) = 0$ rečemo, da o njeni stopnji ni mogoče govoriti.

Seštevanje in odštevanje polinomov

Polinome seštevamo in odštevamo tako, da seštejemo ali odštejemo koeficiente pri členih z enako stopnjo (tako kot smo seštevali in odštevali veččlenike). Vsota in razlika polinomov je polinom, ki ima enako ali nižjo stopnjo od najvišje stopnje vseh vodilnih členov, ki nastopajo v izrazu.

ZGLED 1:

Za polinoma $p(x) = 7x^5 - 4x^4 + 2x^2$ in $q(x) = 2x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 5$ izračunajmo vsoto $p(x) + q(x)$ in razliko $p(x) - q(x)$.

Vsoto $p(x) + q(x)$ izračunamo:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= 7x^5 - 4x^4 + 2x^2 + (2x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 5) \\ &= 9x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5. \end{aligned}$$

Razliko $p(x) - q(x)$ izračunamo:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= 7x^5 - 4x^4 + 2x^2 - (2x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 5) \\ &= 7x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 2x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 5 \\ &= 5x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5. \end{aligned}$$

Množenje polinomov ***(polinom s številom, polinom s polinomom)***

Polinome množimo z neničelnimi števili tako, da vse posamezne koeficiente polinoma množimo s številom. Polinomom se pri množenju s števili stopnja ne spremeni.

Množenje dveh polinomov izvajamo tako, da vsak člen iz prvega polinoma pomnožimo z vsakim členom iz drugega polinoma. Produkt dveh polinomov je polinom, ki ima stopnjo enako vsoti stopenj polinomov, ki smo jih množili (faktorjev).

ZGLED 2:

Za polinoma: $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 5$ in $q(x) = x^2 - 2$ izračunajmo produkt $6p(x)$ in produkt $p(x) \cdot q(x)$.

Produkt $6p(x)$ izračunamo:

$$\begin{aligned} 6p(x) &= 6\cdot(3x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 5) \\ &= 18x^5 - 12x^3 + 12x^2 - 30. \end{aligned}$$

Produkt $p(x)\cdot q(x)$ izračunamo:

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (3x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 5)\cdot(x^2 - 2) \\ &= 3x^7 - 2x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 6x^5 + 4x^3 - 4x^2 + 10 \\ &= 3x^7 - 8x^5 + 6x^4 - 9x^2 + 10. \end{aligned}$$

A Pomni:

Polinome lahko "po mili volji" seštevamo, odštevamo in množimo, vendar moramo pri vsaki operaciji, ki jo izvajamo, upoštevati splošne zakone računanja. Končni rezultati operacij so vedno polinomi.

VAJE

1. Za polinoma $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$ in $q(x) = 7x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 2x + 6$ izračunajte $p(x) + q(x)$ in $p(x) - q(x)$.
2. Za polinoma $p(x) = -x^5 + 6x^4 - 2x - 8$ in $q(x) = 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 2x + 8$ izračunajte p(x)+q(x) in p(x)+q(x).
3. Dani so naslednji polinomi: $p(x) = x - 1$ $q(x) = x^2 - x - 1$, $r(x) = x^3 - x^2 + 1$ in $s(x) = 2x^4 - x^2 + 2$. Izračunajte.

   a) $p(x) + q(x)$

   b) $q(x) + r(x)$

   c) $s(x) - r(x) + p(x)$

   d) $r(x) - q(x) + s(x)$
4. Za polinoma $p(x) = x^2 - 1$ in $q(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 9$ izračunajte $p(x)\cdot q(x)$ in $4\cdot q(x)$.
5. Zmnožite polinoma $p(x) = x - 1$ in $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
6. Zmnožite polinoma $p(x) = x + 3$ in $q(x) = x^2 - 3x + 9$.
7. Izračunajte $\frac{2}{3}\cdot p(x)$ če je $p(x) = 6x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 33$.
8. Za polinome $p(x) = x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 1$ in $r(x) = x - 1$ izračunajte.

   a) $p(x)\cdot q(x)$

   b) $p(x)\cdot r(x)$

   c) $3q(x)\cdot 2r(x)$

   d) $\frac{1}{2}p(x)\cdot q(x) + r(x)$
9. Zapišite stopnje rezultatov, dobljenih v 8. nalogi.
10. Izračunajte.

a) $\frac{3}{2}(x - 1)(4x^2 + 6x - 12)$

b) $(x^2 + 9x - 5)(2x^2 + 3x + 5)$

c) $\frac{3}{4}(16x^3 + 8x^2 - 20)(3x^2 - 2)$

Deljenje polinomov

Za deljenje polinomov uporabimo izrek, ki pravi: če je polinom $p(x)$ stopnje n in polinom $q(x)$ stopnje m in $n \geq m$, potem velja enakost:

$$\boxed{p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x),}$$

kjer je stopnja polinoma $k(x)$ enaka $n - m$, stopnja polinoma $r(x)$ pa je strogo manjša od m ali pa je $r(x) = 0$.

V izreku o deljenju imenujemo:

$p(x) \cdots$ deljenec,

$k(x) \cdots$ količnik,

$q(x) \cdots$ delitelj,

$r(x) \cdots$ ostanek.

A Spomni se:

Podobno velja, da za dve naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ kjer je $a > b$, obstaja tako naravno število $k \in \mathbb{N}$, da lahko:

$$a = k \cdot b + r \quad 0 \leq r < b.$$

a – deljenec, b – delitelj, k - količnik, r – ostanek

Kako izvajamo deljenje dveh polinomov, pa si bomo ogledali na zgledu 3.

ZGLED 3:

Polinom $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 5$ delimo s polinomom $q(x) = x^2 - 2$.

$$\begin{array}{rrrrrl}
(3x^5 & -\,2x^3 & -\,2x^2 & & -\,5) & :(x^2-2) = 3x^3 + 4x - 2\\
3x^5 & -\,6x^3 & & & & \\
- & + & & & & \\ \hline
 & 4x^3 & -\,2x^2 & & -\,5 & \\
 & 4x^3 & & -\,8x & & \\
 & - & & + & & \\ \hline
 & & -\,2x^2 & +\,8x & -\,5 & \\
 & & -\,2x^2 & & +\,4 & \\
 & & + & & - & \\ \hline
 & & & 8x & -\,9 &
\end{array}$$

Količnik $k(x) = 3x^3 + 4x - 2$ in ostanek $r(x) = 8x - 9$.

$3x^3$ smo dobili kot količnik $\dfrac{3x^5}{x^2}$

$4x$ smo dobili kot količnik $\dfrac{4x^3}{x^2}$

-2 smo dobili kot količnik $\dfrac{-2x^2}{x^2}$

V *računu vedno vodilni člen polinoma* $p(x)$ *delimo z vodilnim členom* $q(x)$ *in nato dobljeni količnik pomnožimo s polinomom* $q(x)$ *ter dobljeni produkt odštejemo od* $p(x)$. *Postopek ponavljamo, dokler ostanek nima manjše stopnje kot* $q(x)$.

ZGLED 4:

Polinom $p(x) = x^3 - 1$ je deljiv z nekim polinomom $q(x)$ tako, da dobimo količnik $k(x) = x^2 + x + 1$. Določimo polinom $q(x)$.

A Pomni:

Polinom $p(x)$ je deljiv s polinomom $q(x)$, če je ostanek pri deljenju $r(x) = 0$.

Ker je količnik pri deljenju stopnje 2, bo delitelj stopnje 1, saj je deljenec stopnje 3. Iščemo torej polimom oblike $a_1x + a_0$. Ostanek je 0, saj je $p(x)$ deljiv s polinomom $q(x)$. Zapišemo zvezo po izreku o deljenju:

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x)$$

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(a_1x + a_0) + 0;$$

zmnožimo in enačimo koeficiente pri enakih stopnjah:

$$x^3 - 1 = a_1x^3 + (a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0$$

$$a_1 = 1, a_1 + a_0 = 0, a_1 + a_0 = 0, a_0 = -1.$$

Brez nadaljnjega računanja dobimo iskani polinom $q(x) = x - 1$.

VAJE

11. Delite polinom $p(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 3x + 9$ s polinomom $q(x) = x - 2$.
12. Delite polinom $p(x) = 4x^6 - 12x^4 + 2x^3 - 18x^2$ s polinomom $q(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
13. Delite polinom $p(x) = x^5 - 1$ s polinomom $q(x) = x - 1$.
14. Ali je polinom $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ deljiv s polinomom $q(x) = x - \frac{1}{2}$?
15. Ali je polinom $p(x) = 12x^5 + 15x^4 - 13x^3 + 8x^2 + 3x - 1$ deljiv s polinomom $q(x) = x^2 - 1$?
16. Ali je polinom $p(x) = 7x^6 - 9x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 11$ deljiv s polinomom $q(x) = x - 2$?
17. Količnik pri deljenju polinoma $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ s polinomom $q(x)$ je polinom $k(x) = (x + 1)(x^2 - 1)$. Poiščite $q(x)$, če je $p(x)$ deljiv z $q(x)$.
18. Določite neznani koeficient polinoma $p(x) = 6x^3 + 11x^2 + a_1x - 12$ tako, da bo ostanek pri deljenju s polinomom $q(x) = 2x + 3$ enak nič.

19. Za kateri realni števili $a; b \in R$ bo imel polinom $p(x) = 2x^4 - x^3 + bx^2 + 1$ pri deljenju s polinomom $q(x) = x - 3$ količnik $k(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ in ostanek $r(x) = 9$?

Ničle polinoma

Če delimo polinom $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ z linearnim polinomom $q(x) = x - c \; (c \in R)$ po že do sedaj spoznanih temeljih deljenja polinoma s polinomom, pridemo do zveze:

$$p(x) = k(x) \cdot (x - c) + r(x).$$

Če sedaj želimo izračunati vrednost polinoma $p(x)$, ko je $x = c$ dobimo:

$$\begin{aligned} p(c) &= k(c) \cdot (c - c) + r(c) \\ p(c) &= r(c) \end{aligned}$$

Kar pa pomeni, da je vrednost polinoma $p(x)$ v točki, ko je $x = c$, enaka vrednosti ostanka pri deljenju polinoma $p(x)$ z $q(x) = x - c$ za $x = c$.

Sklep, ki nas pripelje do bistva tega razdelka, je ta:

Če je $p(x)$ deljiv z $x - c$, je število $c \in R$ ničla polinoma $p(x)$.

Za ničle velja splošen pogoj, da je $p(x) = 0$, torej če je $p(c) = 0$, je tudi $r(c) = 0$. Po drugi strani to pomeni, da kadar je c ničla polinoma $p(x)$, velja $p(x) = k(x)(x - c)$. Pri tem vemo, da je stopnja linearnega polinoma $(x - c)$ enaka 1, zato je stopnja $k(x)$ enaka $n - 1$, kjer je n stopnja polinoma $p(x)$.

Sklenemo, da za $p(x)$ velja tudi:

$$p(x) = k(x) \cdot (x - c)^k \quad k(c) \neq 0;$$

potem rečemo, da je število c, k - kratna ničla polinoma $p(x)$, oziroma da je stopnja ničle c enaka k. Pri tem moramo biti zelo pozorni, saj je stopnja polinoma $p(x)$ enaka vsoti stopenj polinomov, ki jih množimo. Ker je stopnja polinoma $(x - c)^k$ enaka k, je stopnja polinoma $k(x)$ $n - k$, kjer je n stopnja polinoma p(x).

Če se da polinom $k(x)$ razstaviti na same linearne faktorje (člene oblike $x - x_j$), lahko zapišemo polinom $p(x)$ takole:

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

kjer so $x_1; x_2; \cdots x_n$ ničle polinoma $p(x)$, saj ko x zavzame neko vrednost izmed $x_1; \cdots x_n$, je eden izmed faktorjev polinoma $p(x)$ enak nič. Takemu zapisu pravimo faktorizirana enačba polinoma $p(x)$. Lahko trdimo, da: **ima polinom stopnje n največ n realnih ničel**.

A Za polinom $p(x)$ stopnje n ni nujno, da je n ničel v množici realnih števil $(\mathbb{R})$, ampak je natanko n ničel v množici kompleksnih števil $(\mathbb{C})$.

ZGLED 5:

Zapišimo realne ničle polinoma $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

Polinom razstavimo:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 3x^2 + 2 \\ p(x) &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) \\ p(x) &= (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ničle so $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$.

ZGLED 6:

Zapišimo realne ničle polinoma $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Razstavimo $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2(x - 2) + 4(x - 2) \\ p(x) &= (x - 2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

Realna ničla je tokrat samo $x_1 = 2$, saj se $x^2 + 4$ ne da razstaviti v množici realnih števil.

VAJE

20. Izračunajte vrednosti polinoma
$p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x + 10$ v točkah:
$x = \{-1; 0; 1; 1{,}5\}$.

21. Izračunajte vrednosti polinoma
$p(x) = (x - 3)^2(2x + 5)(x^2 + x + 2)$
v točkah: $x = \{-1; 0; 1; 1{,}5\}$.

22. Poiščite realne ničle polinomov.

a) $x^4 - 6x^2 + 8$

b) $x^4 - x^2 - 6$

c) $x^4 + 2x^2 + 1$

23. Poiščite realne ničle polinomov.

a) $3x^3 - 6x^2 - 9x + 18$

b) $8x^3 - 27$

c) $x^3 - x^2 + 5x + 5$

d) $6x^3 + 9x^2 - 12x + 18$

24. Dokažite, da je število -1 ničla polinoma

$p(x) = x^4 + 3x^2 + 6x^2 + 7x + 3$, in
zapišite njeno večkratnost.

25. Določite večkratnost ničle $x = 2$ polinoma
$p(x) = x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x - 40.$

26. Razstavite.

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

b) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$

Hornerjev algoritem

Polinom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ stopnje $n \in \mathbb{N}$ delimo z linearnim polinmom $q(x) = x - c$ tako:

$$\begin{aligned} p(x) : q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) : (x - c) \\ &= b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 + \frac{r(x)}{x - c} \\ &= k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}; \end{aligned}$$

kjer je $a_n = b_{n-1}$, $r(x)$ neka konstanta, $k(x)$ pa je stopnje $n - 1$.

Koeficiente količnika $k(x)$ pri deljenju polinoma z linearnim polinomom lahko poiščemo s algoritmom, prikazanim v spodnji tabeli:

	:	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
c	:	#	$c \cdot b_{n-1}$	$c \cdot b_{n-2}$	$\cdots$	$c \cdot b_1$	$c \cdot b_0$
		b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$\boxed{r(x)}$

Tako dobimo $b_{n-1} = a_n$ in $b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot b_{n-1}$ oz. splošno: $b_i = a_{i+1} + c \cdot b_{i+1}$.
Ostanek je torej vsota $r(x) = a_0 + c \cdot b_0$.

Algoritem imenujemo **Hornerjev algoritem**, uporabljamo ga za deljenje polinoma z linearnim polinomom, iskanje ničel *(ničla je, kadar je na mestu ostanka 0)*, določanje vrednosti polinoma v neki točki,...

[ZGLED 7](#):

S Hornerjevim algoritmom delimo polinom $p(x) = x^3 - 2x^2 - 8$ s polinomom $q(x) = x - 1$.

	:	1	-2	0	-8
1	$\downarrow$		1	-1	-1
		1	-1	-1	-9

Po Hornerjevem algoritmu je $k(x) = 1x^2 - 1x - 1$, ostanek $r(x) = -9$.

[ZGLED 8](#):

Ali je $x = -2$ ničla polinoma $p(x) = 3x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 10$?

Preverimo s Hornerjevim algoritmom (lahko bi izračunali $p(-2)$):

	:	3	10	8	-2	1	10
-2	$\downarrow$		-6	-8	0	4	-10
		3	4	0	-2	5	0

Ker je ostanek 0, pomeni, da je število $x = -2$ ničla polinoma $p(x)$. Če bi polinom $p(x)$ delili s polinomom $q(x) = x + 2$, bi dobili količnik $k(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x + 5$ in ostanek $r(x) = 0$. Preverite.

[ZGLED 9](#):

Določimo koeficienta $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo $p(x) = x^4 + ax^3 + 4x^2 + bx - 15$ imel ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 3$.

Uporabili bomo Hornerjev algoritem (dvakrat):

	:	1	a	4	b	-15
-1	$\downarrow$		-1	$-a+1$	$a-5$	$-a-b+5$
		1	$a-1$	$-a+5$	$a+b-5$	$-a-b-10$

Dobimo količnik $k(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (-a+5)x + a + b - 5$ in ostanek $r(x) = -a - b - 10$, ki mora biti 0, saj je $x_1 = -1$ ničla polinoma.

Če želimo, da bo še $x_2 = 3$ ničla polinoma $p(x)$ bo tudi ničla za polinom $k(x)$ in sledi:

:	1	$a-1$	$-a+5$	$a+b-5$
3	#	3	$3a+6$	$6a+33$
	1	$a+2$	$2a+11$	$7a+b+28$

Tudi tokrat mora biti ostanek 0 in dobimo sistem enačb, ki ga z lahkoto rešimo:

$$\begin{array}{rcl} -a-b-10 &=& 0 \\ 7a+b+28 &=& 0 \\ \hline 6a+18 &=& 0 \\ a &=& -3 \\ \Rightarrow \quad b &=& -7. \end{array} \quad +$$

Tako dobimo iskani polinom, ki je:

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x - 15$$

in ima ničli $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Preverite.

ZGLED 10:

Določimo polinom tretje stopnje, za katerega velja $p(2) = 3$, njegove ničle pa so $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ in $x_3 = 4$.

Za polinom uporabimo dejstvo, da je polinom tretje stopnje – ima 3 ničle in uporabimo nastavek:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3);$$

vstavimo ničle in poiščemo vodilni koeficient s pomočjo dejstva p(2)=3:

$$\begin{array}{rcl} p(x) &=& a_n(x-1)(x+2)(x-4) \\ 3 &=& a_n(2-1)(2+2)(2-4) \\ a_n &=& -\frac{8}{3}. \end{array}$$

Dobimo: $p(x) = 2\frac{2}{3}x^3 - 8x^2 - 26\frac{2}{3}x + 21\frac{1}{3}$.

A Pomni:

Kandidati za racionalne ničle so taki ulomki $\frac{c}{d}$, kjer c deli prosti člen a_o, d pa deli vodilni koeficient a_n.

VAJE

27. S Hornerjevim algoritmom delite polinoma $p(x) = 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x - 3$ in $q(x) = x - 3$.
28. S Hornerjevim algoritmom delite polinoma $p(x) = 3x^5 - 3x^3 - 9x^2 + 7x - 3$ in $q(x) = x + 1$.
29. S Hornerjevim algoritmom izračunajte $p(a)$ za $a = \{-2; -1; 0; 1; 3\}$ in $p(x) = 5x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 9x$.
30. Kateri izmed števil $-5; -2; 0; 2; 3; 12$ sta ničli polinoma, danega s predpisom $p(x) = 4x^4 + 12x^3 - 56x^2 - 52x - 60$?
31. S Hornerjevim algoritmom pokažite, da je $x = -1$ničla za $p(x) = 3x^3 - 36x - 36$. Poiščite še ostali dve ničli.
32. S Hornerjevim algoritmom pokažite, da je

$x = 5$ ničla za polinoma z enačbo $p(x) = 2x^3 - 14x^2 + 22x - 10$. Poiščite še ostali dve ničli.

33. Za polinom $p(x) = x^3 + 7x + ax - 5$ določite a tako, da bo $x = -2$ ničla polinoma $p(x)$.

34. Določite $a; b \in \mathbb{R}$ tako, da bo imel polinom $p(x) = 3x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 6$ ničli $x_1 = -3$ in $x_2 = 2$.

35. Določite $a; b \in \mathbb{R}$ tako, da bo imel polinom $p(x) = 2x^4 + ax^3 - 9x^2 + bx + 7$ ničli $x_{1;2} = \pm 1$.

36. Zapišite enačbo polinoma tretje stopnje, ki ima ničle $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ in $x_3 = -3$ ter poteka skozi točko $A(-1; 1)$.

37. Zapišite enačbo polinoma tretje stopnje, ki ima ničle $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 3$ ter je p(2)=1.

38. Polinom četrte stopnje ima ničle $x_1 = 1$, $x_{2;3} = 2$, $x_4 = 3$. Začetna vrednost polinoma je 1. Zapišite njegovo enačbo.

Graf polinoma

Graf polinoma z enačbo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

in realnimi koeficienti $\{a_n; a_{n-1}; \cdots; a_1; a_0\} \in \mathbb{R}$ je zvezna (nepretrgana) krivulja.

Pri risanju grafa se bomo osredotočili na presečišča z abcisno osjo (ničle) in presečišče z ordinatno osjo (začetna vrednost) ter obnašanje krivulje daleč stran od izhodišča: $x \to -\infty$ in $x \to \infty$.

Graf bomo narisali s pomočjo (nekaterih že znanih) dejstev:

F <u>Polinom *n*-te stopnje ima največ *n* realnih ničel</u>.

Spomnimo se *(str. 10)*, da lahko poljuben polinom n-te stopnje zapišemo kot produkt nerazcepnih faktorjev: $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. Če so vsi faktorji linearni, to pomeni, da jih je n, smo našli toliko (n) realnih ničel.

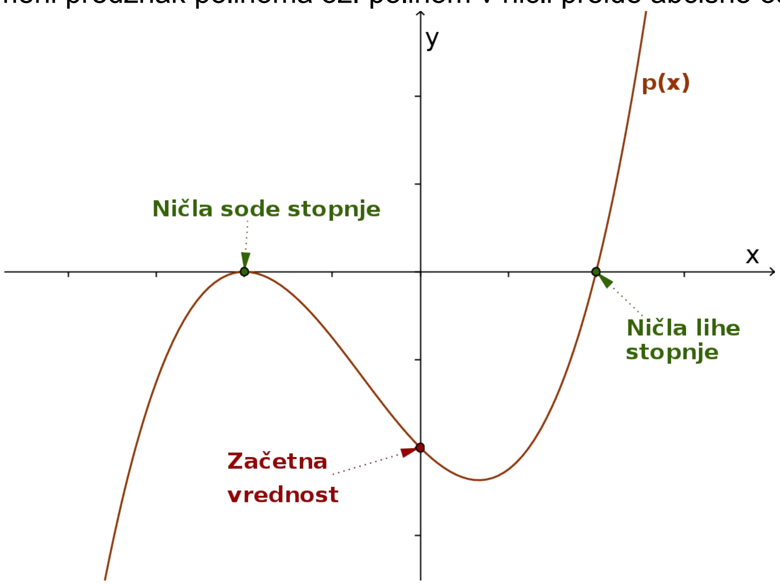
- <u>Polinom spremeni predznak le v ničli lihe stopnje</u>.

  Denimo, da na nekem območju polinom sploh nima ničle, potem je produkt faktorjev $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ na tistem območju vedno enakega predznaka, saj nobeden izmed faktorjev ni spremenil predznaka (linearni člen $x - x_i$ spremeni predznak v $x = x_i$).

  Oglejmo si, kaj se zgodi, če je ničla x_i sode stopnje: $\cdots(x - x_i)^m\cdots$, m-sodo. Najsibo faktor pozitiven ali negativen, bo po potenciranju na sodo potenco vedno pozitiven, zato se v ničli sode stopnje le dotakne abcisne osi.

  Logično sledi: če je m-liha (x_i je ničla lihe stopnje) potenca, faktor $\cdots(x - x_i)^m\cdots$, ko je $x = x_i$, spremeni predznak polinoma oz. polinom v ničli preide abcisno os.

A <u>Pomni</u>:
$p(x) = k(x)(x - c)^k$
za c pravimo da je ničla:
- <u>liha</u>, če k liho število
- <u>soda</u>, če je k sodo število



Slika 1: Pomen ničel

- <u>Obnašanje polinoma daleč od izhodišča določa vodilni člen polinoma</u>.

  Denimo, da iz splošne enačbe polinoma izpostavimo vodilni člen $a_n x^n$:

$$p(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}x^{-n}\right];$$

  opazimo, ko je $|x|$ dovolj velik, se izraz v oklepaju približuje 1 in je zato posledično zanemarljiv v primerjavi z $a_n x^n$. Dejansko lahko potem obnašanje polinoma poenostavimo na obnašanje člena $a_n x^n$. Kakšen predznak ima polinom desno od "najbolj desne ničle" $(x \to +\infty)$ in kakšen je predznak levo od "najbolj leve ničle" $(x \to -\infty)$, nam torej pove člen $a_n x^n$.

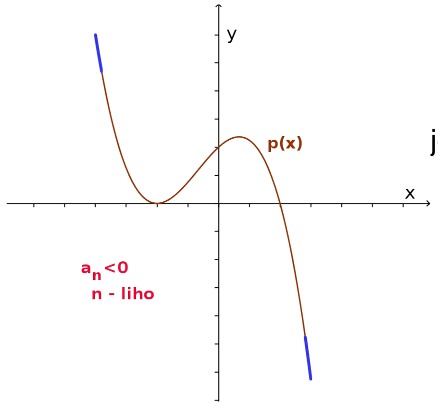
Analizirajmo torej produkt $a_n x^n$:

Prva možnost je na sliki 2.

Vodilni faktor je negativen ($a_n < 0$), stopnja n pa je liha (narišite npr $-x^3$).

Ko velja, da gre $x \to -\infty$, je produkt $a_n x^n$ pozitiven, torej gredo $p(x) \to +\infty$ (npr: $-5(-100)^3 > 0$).

Ko velja, da gre $x \to +\infty$, je produkt $a_n x^n$ negativen, torej gredo $p(x) \to -\infty$ (npr: $-5(100)^3 < 0$).



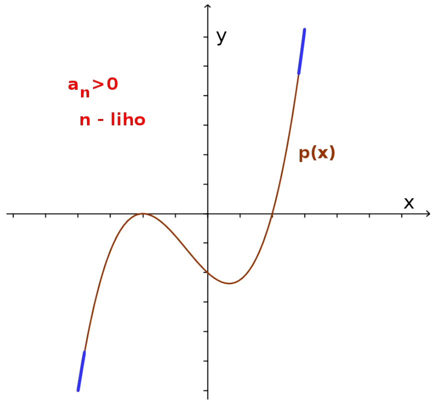
Slika 2: $a_n < 0$, n-liho

Druga možnost je na sliki 3.

Vodilni faktor je pozitiven ($a_n > 0$), stopnja n pa je liha. (narišite npr x^3)

Ko velja, da gre $x \to -\infty$, je produkt $a_n x^n$ negativen, torej gredo $p(x) \to -\infty$ (npr: $7(-100)^3 < 0$).

Ko velja, da gre $x \to +\infty$, je produkt $a_n x^n$ pozitiven, torej gredo $p(x) \to +\infty$ (npr: $7(100)^3 > 0$).



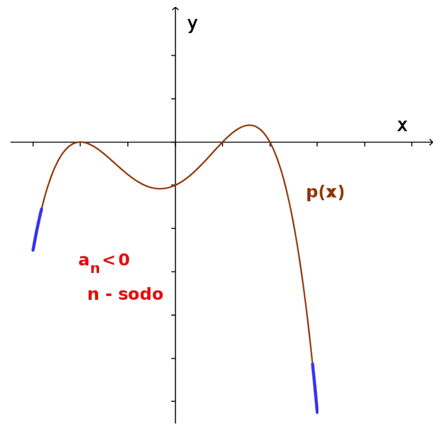
Slika 3: $a_n > 0$, n-liho

Tretja možnost je na sliki 4.

Vodilni faktor je negativen ($a_n < 0$), stopnja n pa je soda (narišite npr $-x^4$).

Ko velja, da gre $x \to -\infty$, je produkt $a_n x^n$ negativen, torej gredo $p(x) \to -\infty$ (npr: $-2(-100)^4 < 0$).

Ko velja, da gre $x \to +\infty$, je produkt $a_n x^n$ negativen, torej gredo $p(x) \to -\infty$ (npr: $-2(100)^4 < 0$).

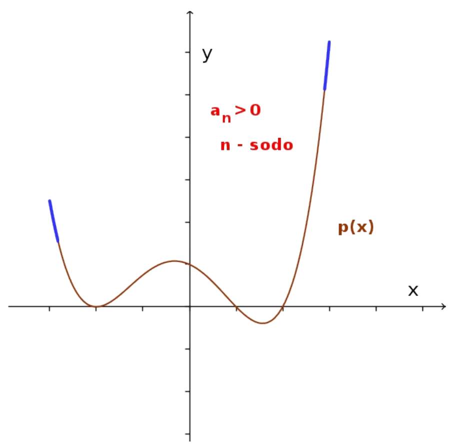


Slika 4: $a_n < 0$, n-sodo

Četrta možnost je na sliki 5.

Vodilni faktor je pozitiven ($a_n > 0$), stopnja n pa je soda (narišite npr x^4).

Ko velja, da gre $x \to -\infty$, je produkt $a_n x^n$



Slika 5: $a_n > 0$, n-sodo

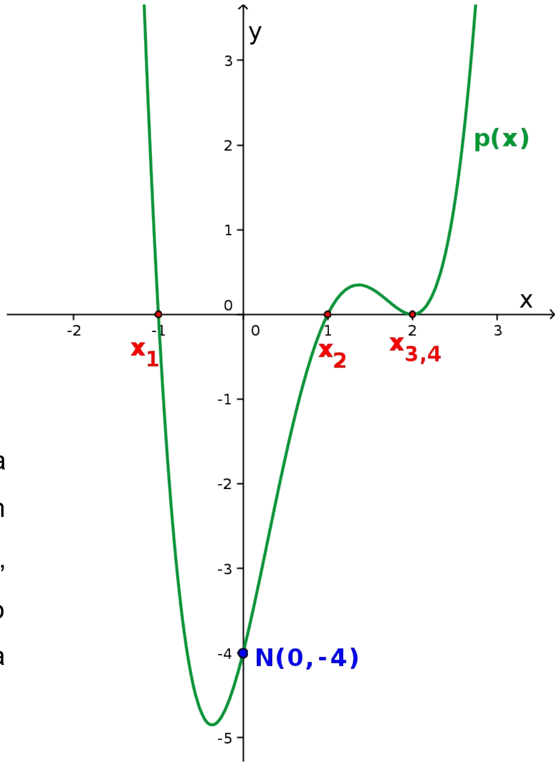
pozitiven, torej gredo $p(x) \mapsto +\infty$ (npr: $-9(100)^4 > 0$).

Ko velja, da gre $x \mapsto +\infty$, je produkt $a_n x^n$ pozitiven, torej gredo $p(x) \mapsto +\infty$ (npr: $9(100)^4 > 0$).

ZGLED 11:

Narišimo polinom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x + 4x - 4$. Določimo njegove ničle in začetno vrednost.

Začetna vrednost je točka, kjer graf seka ordinatno os, to je točka, kjer je $x = 0$, zato je $p(0) = -4$. Točka pa je $N(0; -4)$.



Slika 6: Zgled 11

Ničle bomo poiskali s pomočjo Hornerjevega algoritma.
Kandidati za racionalne ničle so $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Poskusimo:

:	1	-4	$+3$	4	-4
-1	$\downarrow$	-1	5	-8	4
	1	-5	8	-4	0
1	$\downarrow$	1	-4	4	
	1	-4	4	0	

Tako smo potrdili, da sta $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$ ničli polinoma $p(x)$. Iz Hornerjevega algoritma vidimo, da se da polinom $p(x)$ zapisati kot $p(x) = k(x)(x + 1)(x - 1)$. Vemo, da ima polinom četrte stopnje lahko 4 realne ničle, zato poskusimo poiskati še ostali dve, ki sta ničli količnika $k(x) = x^2 - 4x + 4$.

Razstavimo količnik:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$.

Dobimo še tretjo in četrto ničlo $x_{1;2} = 2$ (število 2 je dvakratna ničla polinoma $p(x)$) - v njej se graf polinoma dotakne abcisne osi.

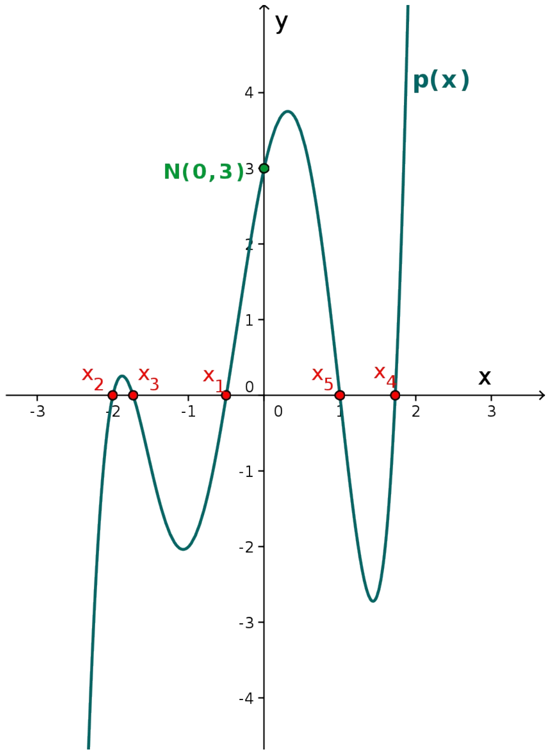
Uporabimo dejstvo, da je graf za $x \mapsto -\infty$ pozitiven, prav tako za $x \mapsto +\infty$ (ker je $a_n = 1 > 0$, n pa je sodo število).

ZGLED 12:

Narišimo polinom $p(x) = (x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6)(x + \frac{1}{2})$. Določimo njegove ničle in zapišimo še polinom v faktorizirani obliki.

Začetna vrednost je tokrat $p(0) = (6)(\frac{1}{2}) = 3$.

Eno ničlo že poznamo $x_1 = -\frac{1}{2}$, poiskati jih moramo še 4, saj imamo polinom pete stopnje. Ničle bomo iskali v delu $k(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$.



Slika 7: Zgled 12

Poskusimo $x_2 = 1$:

:	1	1	−5	−3	6
−2	#	−2	2	6	−6
	1	−1	−3	3	0

Očitno je x_1 ničla.

Na tej točki imamo že drugi faktor polinoma $p(x) = (x^3 - x^2 - 3x + 3)(x + 2)(x + \frac{1}{2})$.

Razstavimo še količnik $k(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$:

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 - x^2 - 3x + 3 \\
&= x^2(x - 1) - 3(x - 1) \\
&= (x^2 - 3)(x - 1) \\
0 &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1)
\end{aligned}$$

Dobimo ničle $x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}$ in $x_5 = 1$.

Faktorizirana enačba polinoma: $p(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1)(x + 2)(x - \frac{1}{2})$.

Vodilni člen polinoma je v tem primeru x^5, zato bo, ko bo šel $x \to -\infty$, $p(x) < 0$, ko pa bo šel $x \to +\infty$ pa bo $p(x) > 0$.

Narišemo še polinom (slika 7).

ZGLED 13:

Narišimo polinom $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x$.

Poiščemo začetno vrednost $p(0) = 0$, $N(0;0)$.

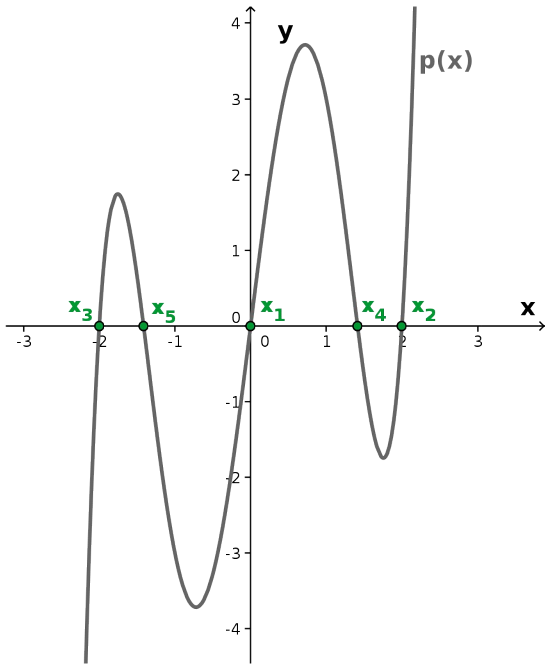
Poiščemo še ničle:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^5 - 6x^3 + 8x \\
0 &= x(x^4 - 6x^2 + 8) \\
0 &= x(x^2 - 4)(x^2 - 2) \\
0 &= x(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Ničle so:

$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2; x_4 = \sqrt{2}; x_5 = -\sqrt{2}$.

Ko gre $x \to -\infty$, je $p(x) < 0$, ko pa gre $x \to \infty$, pa je $p(x) > 0$.



Slika 8: Zgled 13

VAJE

39. Zapišite vodilni člen, vodilni koeficient, stopnjo polinoma, poiščite ničle in začetno vrednost ter narišite polinome:

    a) $(x^2 - 1)^2(x + 2)$

    b) $x^3 - 3x^2 - 4x$

    c) $x^4 - 4x^2$

    d) $x^5 + x^3 - 2x$

    e) $-2x^3 - 4x + 10x - 20$

    f) $x^3 - 7x + 6$

40. Zapišite enačbo polinomov v faktorizirani obliki in narišite polinome:

    s) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

    b) $x^5 - 7x^3 - 18x$

    c) $2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$

    d) $3x^5 - 20x^4 + 36x^3 + 2x^2 - 39x + 18$

41. Zapišite ničle in narišite polinom $p(x) = 3x^3 + 5x^2 - 16x - 12$. Zapišite intervale, kjer je p(x)>0.

42. V koordinatni sistem narišite polinom $p(x) = 2x^4 - x^3 - 17x^2 + 16x + 12$ in polinom $|p(x)|$.

43. Določite $a; b \in \mathbb{R}$ tako, da bo imel polinom $p(x) = 3x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 6$ ničli $x_1 = -3$ in $x_2 = 2$. Poiščite še ostali ničli in polinom p(x) narišite v koordinatni sistem.

44. Določite $a; b \in \mathbb{R}$ tako, da bo imel polinom $p(x) = 2x^4 + ax^3 - 9x^2 + bx + 7$ ničli $x_{1;2} = \pm 1$. Poiščite še ostali ničli in polinom p(x) narišite v koordinatni sistem.