REPUBLIKA SLOVENIJA MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

TŠC Nova Gorica BIOTEHNIŠKA ŠOLA

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Logaritmi

Mišo Krog

Srednje strokovno izobraževanje: Kmetijski tehnik, tehniki

Modul: MATEMATIKA

Naslov: Logaritmi

Gradivo za 3.letnik SSI

Avtor: Mišo Krog

Strokovni recenzent: Janja Barber Rojc, prof. mat.

Lektor: Severin Drekonja, dipl. komp.

Šempeter pri Gorici, 2011

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Biotehniška področja, šole za življenje in razvoj (2008-2012).

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina

Kazalo ilustracij

Slika 1: Jurij Vega

Slovenski matematik Jurij Vega je leta 1794 izdal veliki desetdecimalni latinsko nemški logaritmovnik *(Thesaurus logarithmorum completus)*.

Vega se je drugo polovico svojega življenja v veliki meri ukvarjal z logaritmi. S svojimi izračuni je presegel vse do takrat uporabljene logaritmovnike in njegovo delo je bilo za dolga leta najboljše (do sredine 20. stoletja).

Znan je tudi po tem, da je izračunal število π na 137 decimalk natančno in ta rekord obdržal 52 let.

argument

$$\log_a x = y$$

osnova

Definicija

Če zapišemo eksponentno funkcijo $a^y = x$ za $a > 0$ in $a \neq 1$, potem lahko z logaritem x, kjer je osnova $a > 0$ in $a \neq 1$, imenujemo tisti eksponent y, za katerega je $a^y = x$. In zapišemo:

$$\boxed{\log_a x = y \,, \quad a^y = x;}$$

A *Ekvivalenco* $a \Leftrightarrow b$ *preberemo:*
a *velja natanko tedaj, ko velja* b.

kjer številu x pravimo argument oz. logaritmand in zanj ni težko videti, da je $x > 0$, saj je rezultat eksponentne funkcije pri pozitivni osnovi $a > 0$ izraz $a^y > 0$.

Številu a pa pravimo osnova logaritma.

Torej lahko povzamemo, da logaritem obstaja za argumente, večje od nič, kjer je osnova pozitivna in različna od ena.

Zapisi logaritmov

Dvojiški logaritem je logaritem z osnovo 2. Pišemo: $\log_2 x$.

Desetiški logaritem je logaritem z osnovo 10. Za desetiški logaritem velja dogovor, da osnove logaritma ne pišemo:

$$\log_{10} x = \log x.$$

Naravni logaritem je logaritem z iracionalno osnovo e (Eulerjevo število). Podobno kot pri desetiškem logaritmu velja tukaj dogovor, da naravni logaritem pišemo:

$$\log_e x = \ln x.$$

Iz definicije logaritma ($\log_a x = y, \quad a^y = x$) lahko ugotovimo naslednje lastnosti:

Ker je $a^0 = 1$, velja za vsako dovoljeno osnovo a: $\log_a 1 = 0$.

Ker je $a^1 = a$, velja za vsako dovoljeno osnovo a: $\log_a a = 1$.

$$\vdots$$

Ker je $a^n = a^n$, velja za vsako dovoljeno osnovo a: $\log_a a^n = n$.

A Tako kot v zgornjih primerih lahko uporabimo definicijo logaritma tudi v naslednji enakosti:

$$\log_a x = \log_a x$$

in dobimo uporabno lastnost:

$$a^{\log_a x} = x.$$

ZGLED 1:

Izračunajmo:

- $\log_4 16 = x$

Uporabimo definicijo logaritma:

$$4^x = 16$$

$$4^x = 4^2$$

$$x = 2.$$

- $\log_{\frac{1}{2}} 64 = x$

Po definiciji velja:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$$

$$2^{-x} = 2^6$$

$$x = -6.$$

ZGLED 2:

Izračunajmo:

- $\log x = 0$ $\qquad x = 1,$

saj velja, da je:

$$10^0 = 1$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

saj je:

$$e^1 = e$$

ZGLED 3:

Izračunajmo:

• $3^x = 81$

Zapišemo:

$$\log_3 81 = x$$

$$\log_3 3^4 = x.$$

po dejstvu: $\log_a a^n = n$ je

$$x = 4.$$

• $2^{\log_2 6} = x$

$$x = 6$$

saj, če uporabimo definicijo logaritma, vidimo, da se v bistvu sprašujemo kdaj velja:

$$\log_2 x = \log_2 6$$

VAJE:

1. Izračunajte naslednje neznane vrednosti.

   a) $2^x = 128$

   b) $3^x = \frac{1}{27}$

   c) $4^x = 2$

   d) $10^x = 0{,}01$

   e) $0{,}11^x = 0{,}001331$

2. Izračunajte.

   a) $\log_4 64 = x$

   b) $\log_7 49 = x$

   c) $\log_3 \frac{1}{27} = x$

   d) $\log_2 0{,}125 = x$

   e) $\log_8 4 = x$

3. Izračunajte.

   a) $\log_2 x = 4$

   b) $\log_3 x = 3$

   c) $\log_4 x = \frac{5}{2}$

   d) $\log_1 25x = \frac{2}{3}$

4. Izračunajte.

   a) $2^{\log_2 5} = x$

   b) $0{,}3^{\log_{0,3} 3} = x$

   c) $e^{\ln 1} = x$

   d) $10^{\log 5} = x$

5. Poiščite osnovo a.

   a) $\log_a 125 = 3$

   b) $\log_a 32 = 5$

   c) $\log_a 0{,}01 = -2$

   d) $\log_a \frac{1}{e} = -1$

6. Izračunajte neznane količine.

   a) $\log_{¡} 3 = x$

   b) $\log_{¡\ 2} x = 8$

   c) $\log_x \frac{1}{4} = -2$

Pravila računanja z logaritmi

Zapišimo najprej dve različni potenci z enakima osnovama: $x_1 = a^{y_1}$ in $x_2 = a^{y_2}$. Če ju vsako posamezno logaritmiramo (po definiciji logaritma), dobimo:

$$\log_a x_1 = y_1 \,, \quad x_1 = a^{y_1}$$

$$\log_a x_2 = y_2 \,, \quad x_2 = a^{y_2}.$$

A Logaritem produkta

Če potenci zmnožimo, dobimo produkt:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= a^{y_1} \cdot a^{y_2} \\ x_1 \cdot x_2 &= a^{y_1 + y_2}. \end{aligned}$$

In sedaj na produktu potenc uporabimo definicijo logaritma:

$$y_1 + y_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2) \,, \quad x_1 \cdot x_2 = a^{y_1 + y_2},$$

vsoto $y_1 + y_2$ lahko nadomestimo z zgoraj izraženimi logaritmi ($y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$) in dobimo:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Zvezo si interpretiramo kot pravilo, kjer je **logaritem produkta dveh pozitivnih faktorjev enak vsoti logaritmov posameznih pozitivnih faktorjev**.

A Logaritem količnika

Sedaj potenci $x_1 = a^{y_1}$ in $x_2 = a^{y_2}$ delimo:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} \\ \frac{x_1}{x_2} &= a^{y_1 - y_2}. \end{aligned}$$

Dobljeni količnik logaritmiramo:

$$y_1 - y_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \,, \quad \frac{x_1}{x_2} = a^{y_1 - y_2}.$$

razliko $y_1 - y_2$ lahko nadomestimo z izraženimi logaritmi ($y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$) in dobimo:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Zvezo si interpretiramo kot pravilo, kjer je **logaritem količnika enak razliki logaritma deljenca in logaritma delitelja**.

A Logaritem potence

Vzemimo sedaj potenco $x = a^y$ in jo potencirajmo s poljubnim številom $r \in R$. Dobimo:

$$x^r = a^{y\cdot r}.$$

Sedaj je po definiciji logaritma:

$$y\cdot r = \log_a x^r \iff x^r = a^{y\cdot r}$$

v produkt $y\cdot r$ vstavimo $y = \log_a x$ in dobimo:

$$\log_a x^r = r\cdot\log_a x.$$

Zvezo si interpretiramo kot pravilo, kjer je **logaritem potence enak produktu potence in logaritma njene pozitivne osnove**.

ZGLED 4:

Logaritmirajmo izraz $w = \left(\frac{2x^3\cdot\sqrt{y}}{z^2}\right)^2$.

Logaritmiramo levo in desno stran izraza:

$$\log w = \log\left(\frac{2x^3\cdot\sqrt{y}}{z^2}\right)^2,$$

upoštevamo najprej logaritem potence in dobimo:

$$\log w = 2\log\left(\frac{2x^3\cdot\sqrt{y}}{z^2}\right),$$

nato po logaritmu količnika sledi:

$$\log w = 2\left[\log(2x^3\cdot\sqrt{y}) - \log(z^2)\right].$$

Prvi logaritem v oklepaju razstavimo najprej po logaritmu količnika, naprej pa po že uporabljenih pravilih pridemo do končne oblike:

$$\log w = 2\left(\log(2x^3) + \log y^{\frac{1}{2}} - 2\log z\right)$$

$$\log w = 2\left(\left(3\log(2x)\right) + \frac{1}{2}\log y - 2\log z\right)$$

$$\log w = 2\left(3\log 2 + 3\log x + \frac{1}{2}\log y - 2\log z\right)$$

in odpravimo nepotrebne oklepaje:

$$\log w = 6\log 2 + 6\log x + \log y - 4\log z.$$

ZGLED 5:

Kateri izraz smo logaritmirali, da smo dobili izraz: $\frac{1}{2}\left(3\log x + \log z - \frac{1}{2}\log y\right)$?

Zapišemo, da je npr:

$$\log w = \frac{1}{2}\left(3\log x + \log z - \frac{1}{2}\log y\right),$$

uporabimo pravilo logaritma potence:

$$\log w = \frac{1}{2}\left(\log x^3 + \log z - \log y^{\frac{1}{2}}\right)$$

in vsoto logaritmov združimo:

$$\log w = \frac{1}{2}\left(\log(x^3 \cdot z) - \log\sqrt{y}\right).$$

Združimo še razliko logaritmov

$$\log w = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^3 \cdot z}{\sqrt{y}}\right)$$

in poenostavimo:

$$\log w = \log\left[\left(\frac{x^3 \cdot z}{\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\log w = \log\sqrt{\frac{x^3 \cdot z}{\sqrt{y}}}.$$

Dobimo iskani izraz:

$$w = \sqrt{\frac{x^3 \cdot z}{\sqrt{y}}}.$$

ZGLED 6:

Rešimo načbo: $\sqrt{3^{\log x}} = \sqrt{27}$.

Najprej poenostavimo:

$$3^{\frac{1}{2}\cdot\log x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

in enačimo eksponenta:

$$\frac{1}{2}\cdot\log x = \frac{3}{2} \quad /\cdot 2;$$

dobimo: $\log x = 3$

in uporabimo definicijo logaritma:

$x = 10^3$.

Rešitev: $x = 1000$.

VAJE:

7. Predstavite število z logaritmi praštevil:

   a) $\log 60$

   b) $\log_3 84$

   c) $\log_{\frac{1}{2}} 180$

   d) $\log 3{,}5$

   e) $\log_3 1\frac{5}{3}$

8. Uporabite pravila za delo z logaritmi:

   a) $\log_a(c^2ba^4)$

   b) $\ln(e^a\sqrt{b})$

   c) $\log_a\left(\frac{b^3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{c}}\right)^{-1}$

   d) $\log_b\left(\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b}}\right)$

   e) $\log(10^a c^{-3} a^2)$

9. Logaritmirajte naslednje izraze:

   a) $\omega = 2\pi\frac{1}{t_0}$

   b) $F = \frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

   c) $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

   d) $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

10. Logaritmirajte naslednje izraze:

    a) $P = 4\pi r^2$

    b) $R = \frac{abc}{4S}$

    c) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

11. Logaritmirajte izraze:

    a) $z = \frac{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}}{2a^2\sqrt{ab^3}}$

    b) $z = \sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt[3]{b^2}}}$

    c) $z = \left(\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{c^4-d^4}}\right)^2$

    d) $z = \left(\sqrt[5]{\frac{ab^2x}{\sqrt[3]{cd^2}}}\right)^2$

12. Izrazite x, če je:

    a) $\log x = 2\log(a+b) - 2\log c$

    b) $\log x = \frac{3}{2}\log a + \frac{1}{2}\log c - \frac{1}{4}\log b$

    c) $\log x = \frac{1}{2}\log 8 - \frac{1}{2}\log 2$

d)

$$\log x = 9\log a + \frac{3}{2}\log b - \frac{9}{4}\log c$$

e)

$$\log x = \frac{1}{2}\log(a - b) - \log(a - b) - \log(a + b)$$

13. Rešite nasledneje enačbe:

a) $3^{\log x} = 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} = \sqrt{8}$

c) $36^{\log x} = \frac{1}{6}$

Prehod k novi osnovi

Do sedaj smo opazili, da imamo lahko opravka s poljubnimi pozitivnimi osnovami $a > 0$ in $a \neq 0$. Večina kalkulatorjev operira le z dvema: desetiškimi logaritmi ($a = 10$) in naravnimi logaritmi ($a = e$).

Če vzamemo poljubno potenco z $a^y = x$ in jo logaritmiramo s logaritmom z poljubno osnovo b dobimo:

$$\log_b a^y = \log_b x.$$

Uporabimo pravilo za delo z logaritmi potence in dobimo:

$$y \cdot \log_b a = \log_b x.$$

Na potenci $a^y = x$ uporabimo definicijo logaritma in dobimo $y = \log_a x$. Tako izražen y vstavimo v zadnji izraz in dobimo:

$$\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x.$$

Izraz delimo z $\log_b a$ in dobimo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Zveza nam pove, kako nek logaritem "spravimo" na novo osnovo, ki nam je bolj uporabna. V izrazu je stara osnova označena z a, nova osnova pa je b.

ZGLED 7:

Z žepnim računalom izračunajmo: $\log_3 2$.

Če hočemo logaritem izračunati s kalkulatorjem, ga moramo zapisati z osnovo 10 ali e. Naj bo tokrat 10.

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6393$$

ZGLED 8:

Z žepnim računalom izračunajmo: $\log_7 9$.

$$\log_7 9 = \frac{\ln 9}{\ln 7} = 1{,}1292$$

ZGLED 9:

Izračunajmo vrednost izraza: $\log_7 \sqrt[3]{4} \cdot \log_4 49$.

Faktorju $\log_4 49$ določimo osnovo 7 in zato je:

$$\log_4 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 4}.$$

Izračunamo:

$$\begin{aligned}
\log_7 (4)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 4} &= \frac{1}{3} \log_7 4 \cdot \frac{\log_7 7^2}{\log_7 4} \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 \log_7 7 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

VAJE:

14. Z žepnim računalom izračunajte naslednje logaritme.

 a) $\log_3 5$

 b) $\log_2 9$

 c) $\log_5 30$

 d) $\log_9 112$

 e) $\log_{\frac{1}{3}} 6$

 f) $\log_{0{,}4} 9$

15. Izračunajte vrednosti izrazov.

 a) $\log_3 4 \cdot \log_4 3$

 b) $\log_6 9 \cdot \log_9 36$

 c) $\log_2 \sqrt{125} \cdot \log_5 8$

 d) $\log_7 4 \cdot \log_2 \sqrt{27}$

Reševanje logaritemskih enačb

Logaritemske enačbe so tiste enačbe, kjer neznanka nastopa kot argument logaritma ali kot osnova logaritma. Če neznanka nastopa v osnovi logaritma:

$$\log_x c = y,$$

enačbo rešimo tako, da preko definicije logaritma:

$$\log_x c = y\ , \quad x^y = c$$

dobimo rešitev:

$$x = \sqrt[y]{c}.$$

V večini primerov bomo imeli opravka z enačbami, ko je neznanka v argumentu logaritma (oz. logaritmandu). Takrat je končna logaritemska enačba oblike $\log_a x = y$.

V splošnem pri reševanju pazimo na to, da imajo logaritmi, ki nastopajo v enačbi, enako osnovo in da pravilno uporabljamo spoznana pravila za računanje z logaritmi.

Končni rezultat ni nujno vedno pravilen, zato je nujen preizkus vsake dobljene rešitve.

ZGLED 10:

Rešimo enačbo: $\log_x 3 = \frac{1}{2}$.

Na enačbi uporabimo definicijo logaritma:

$$\log_x 3 = \frac{1}{2}\ , \quad x^{\frac{1}{2}} = 3$$

in rešimo eksponentno enačbo:

$$\sqrt{x} = 3 \quad /^2$$

$$x = 9.$$

Rešitev še preverimo:

PR: $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ drži; saj je $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

ZGLED 10:

Rešimo enačbo: $\log(x+4) = 2\log(2x-1) - \log(x+4)$

Uporabimo znana pravila (za logaritem potence in logaritem količnika) in poenostavimo enačbo:

$$
\begin{aligned}
\log(x+4) &= \log(2x-1)^2 - \log(x+4)\\
\log(x+4) &= \log\left(\frac{(2x-1)^2}{x+4}\right):
\end{aligned}
$$

Dva logaritma z enakima osnovama sta enaka takrat, kadar imata enaka argumenta, zato enačimo argumenta:

$$
\begin{aligned}
x+4 &= \frac{(2x-1)^2}{x+4} \quad = \cdot(x+4)\\
(x+4)(x+4) &= (2x-1)^2\\
x^2+8x+16 &= 4x^2-4x+1\\
0 &= 3(x^2-4x-5)\\
0 &= 3(x-5)(x+1):
\end{aligned}
$$

Dobimo rešitvi kvadratne enačbe $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Preverimo ali sta tudi rešitvi logaritemske:

PR: Za $x_1 = 5$ dobimo:

$$\log 9 = 2\log 9 - \log 9$$

$$\log 9 = \log 9\,;$$

x_1 je rešitev ($L = D$).

Za $x_2 = -1$ vidimo, da člen $\log(2x-1)$ ni definiran, dobimo negativen argument $\log(-5)$.

ZGLED 11:

Rešimo enačbo: $\log_2(3+x) = 1 + \log(1-x)$.

Najprej število 1 zapišemo kot: $1 = \log_2 2$

$\log_2(3+x) = \log_2 2 + \log(1-x)$

in rešimo logaritemsko enačbo po že znanih postopkih:

$$\begin{aligned} \log_2(3+x) &= \log_2(2-2x) \\ 3+x &= 2-2x \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Preverimo še rešitev: $L = \log_2 \frac{8}{3}$ in $D = \log_2 2 + \log_2 \frac{4}{3}$;

velja $L = D$ in rešitev je $-\frac{1}{3}$.

ZGLED 12:

Rešimo enačbo: $\ln^2 x + 2 = 3\ln x$.

Najprej uredimo enačbo po stopnjah logaritmov padajoče:

$$\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0.$$

Za novo spremenljivko izberemo $t = \ln x$ in pišemo enačbo:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-2)(t-1) = 0$$

$$t_1 = 2; t_2 = 1.$$

Ločimo:

$t_1 = 1 = \ln x$	$t_2 = 2 = \ln x$
$x_1 = e.$	$x_2 = e^2.$

Vidimo sta x_1 in x_2 rešitvi:

x_1: $\ln^2 e + 2 = 3\ln e$

$1^2 + 2 = 3$, $2^2 + 2 = 3$ ¢2.

x_2:

$\ln^2(e^2) + 2 = 3\ln e^2$

VAJE:

16. Rešite enačbe.

a) $\log_x(2) = 1$

b) $\log_x(8) = 2$

c) $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

d) $\log_x(16) = -4$

e) $\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

17. Rešite enačbe.

a) $\log_2(x + 1) = 5$

b) $\log_4(10 - 3x) = 2$

c) $\log(4x + 120) = 2$

d) $\log_3(18 - 3x) = 3$

e) $\log_2(\sqrt{x}) = 2$

18. Rešite neenačbe.

a) $\log_2 x < 1$

b) $\log_3 x > 2$

c) $1 < \log x < 2$

d) $-\log x > 2$

e) $-\log_2 x < 3$

19. Rešite naslednje enačbe.

a) $\log(2x + 1) - \log(x + 3) = 0$

b) $\log(5x) - \log(x - 2) = 1$

c) $\log_2(3x - 5) - \log_2(x - 1) = 0$

d) $\ln(2x - 1) = 1$

e) $\log(x) + \log(x - 3) = 1$

20. Rešite naslednje enačbe.

a) $\log(x + 3) - \log(x + 1) = \log(x + 1)$

b) $\ln(3x + 6) - \ln(2x + 2) = \ln(3x - 6) - \ln(x + 1)$

c) $\log 2 + \log(x^2 + 2x + 2) = \log x + \log(x + 5)$

d) $\log(3x^3 - x - 1) - \log(x^2 - x + 1) = \log(3x - 1)$

21. Naslednje enačbe rešite z uvedbo nove spremenljivke.

a) $\log^2 x + 7\log x = 2\log x - 6$

b) $\ln x(\ln x + 3) = 1 + 3\ln x$

Logaritemska funkcija

Logaritemska funkcija je inverzna funkcija eksponentni funkciji. Spomnimo se, da imajo inverze le injektivne funkcije (tiste, ki katerakoli različna elementa vedno slika v različni sliki). Za podano eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$ dobimo inverz f^{-1}.

Na predpisu $y = a^x$ uporabimo definicijo logaritma in dobimo: $x = \log_a y$ in zamenjamo x in y ter dobimo: $y = \log_a x$.

<u>Logaritemska funkcija</u>:

$$\boxed{f(x) = \log_a x,}$$

kjer za osnovo logaritma velja $a > 0$ in $a \neq 1$, za argument logaritma pa velja $x \in \mathbb{R}^+$ (je pozitiven, saj je rezultat potenciranja pozitivne osnove vedno pozitivno število).

A Hitro lahko sklepamo, da imajo vsi logaritmi <u>ničlo</u> pri $f(1)$ saj, kot že vemo, velja za vsako dovoljeno osnovo a vrednost za $x = 1$: $f(1) = \log_a 1 = 0$.

A Za vse logaritemske funkcije lahko tudi rečemo, da obstajajo samo na intervalu, kjer je argument pozitiven; torej $D_f : \{x > 0\}$.

A Vrednosti, ki jih lahko logaritemska funkcija zajame, pa so neomejene, torej $Z_f = \mathbb{R}$.

A Navpična asimptota (pol) je ordinatna os, saj ko je $x = 0$ in $a > 1$ je $f(0) = \log_a 0 = -\infty$. Če pa je $0 < a < 1$ je pri $x = 0$ podobno: $f(0) = \log_a 0 = \infty$.

V splošnem bomo ločili logaritemske funkcije na dve družini funkcij. Prva družina bodo tiste funkcije z osnovo $a > 1$, druga pa bodo tiste funkcije katerih, osnova je med $0 < a < 1$.

Prve so inverzne eksponentnim funkcijam a^x, kjer je bil $a > 1$.

Druge so inverzne funkcijam a^x, kjer je bil $0 < a < 1$.

Inverz funkcije si lahko grafično predstavljamo tudi kot zrcaljenje čez simetralo lihih ($y = x$) kvadrantov.

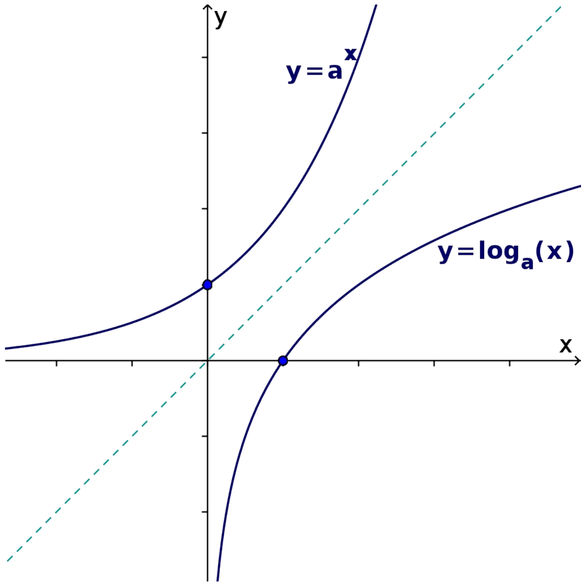
Družina funkcij $f(x) = \log_a x$**; kjer je** $a > 1$

Zraven že zgoraj povedanega o logaritemskih funkcijah (ničla, navpična asimptota, Z_f in D_f) je glavna lastnost funkcij iz družine, ko je $a > 1$, ta, da so naraščajoče.

Funkcije smo dobili kot inverze eksponentnih funkcij a^x, kjer je osnova $a > 1$.

Na sliki 2 vidimo, kako takšne funkcije naraščajo in da so zrcalna slika funkcij a^x čez simetralo lihih kvadrantov.

Na intervalu $0 < x < 1$ je logaritemska funkcija negativna, na intervalu $x > 0$ pa je pozitivna.



Slika 2: $a > 1$

ZGLED 13:

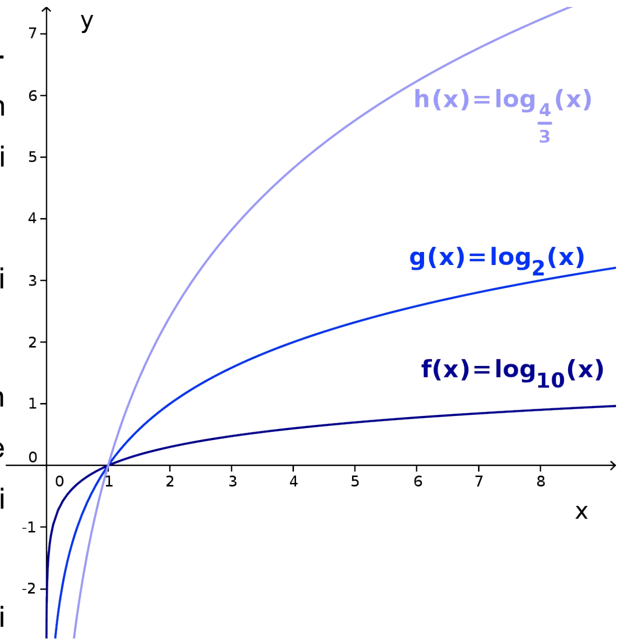
V isti koordinatni sistem narišimo grafe funkcij: $f(x) = \log_{10} x$, $h(x) = \log_{\frac{4}{3}} x$ in $g(x) = \log_2 x$.

Vemo, kakšne oblike so te tri funkcije - naraščajoče, imajo navpično asimptoto pri $x = 0$ in vse tri imajo ničlo pri $(1; 0)$. Vse tri so tudi inverzi eksponentnih funkcij (poiščite katerih).

Pomagajmo si narisati grafe tako, da poiščemo, pri katerem x imajo vrednosti 1 in 2.

Spodaj so izračunane vrednosti, pri katerih posamezna funkcija zavzeme neko vrednost. Te vrednosti vrišemo v koordinatni sistem in nato skozi nijih narišemo logaritemsko krivuljo.

Opazimo, da manjša kot je osnova hitreje vrednosti naraščajo.



Slika 3: Zgled 13

$f(x) = 1$ $g(x) = 1$ $h(x) = 1$ $f(x) = 2$ $g(x) = 2$ $h(x) = 2$

$\log_{10} x = 1$	$\log_2(x) = 1$	$\log_{\frac{4}{3}} x = 1$	$\log_{10} x = 2$	$\log_2(x) = 2$	$\log_{\frac{4}{3}} x = 2$
$x = 10$	$x = 2$	$x = \frac{4}{3}$	$x = 100$	$x = 4$	$x = \frac{16}{9}$

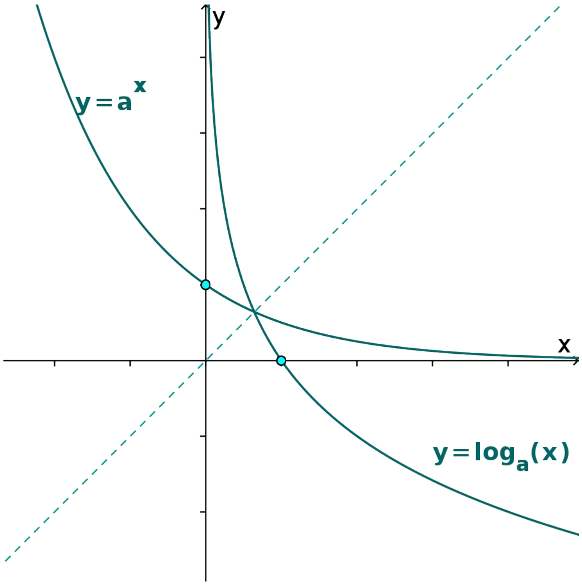
Družina funkcij $f(x) = \log_a x$**; kjer je** $0 < a < 1$

Zraven že v uvodu povedanega o logaritemskih funkcijah (ničla, navpična asimptota, Z_f in D_f) je glavna lastnost družine funkcij pri $0 < a < 1$ ta, da so padajoče.

Funkcije smo dobili kot inverze eksponentnih funkcij a^x z osnovami med $0 < a < 1$.

Na sliki 4 vidimo, da so takšne funkcije padajoče in da so zrcalna slika funkcij a^x čez simetralo lihih kvadrantov.

Na intervalu $0 < x < 1$ je logaritemska funkcija pozitivna, na intervalu $x > 0$ pa je negativna.



Slika 4: $0 < a < 1$

ZGLED 14:

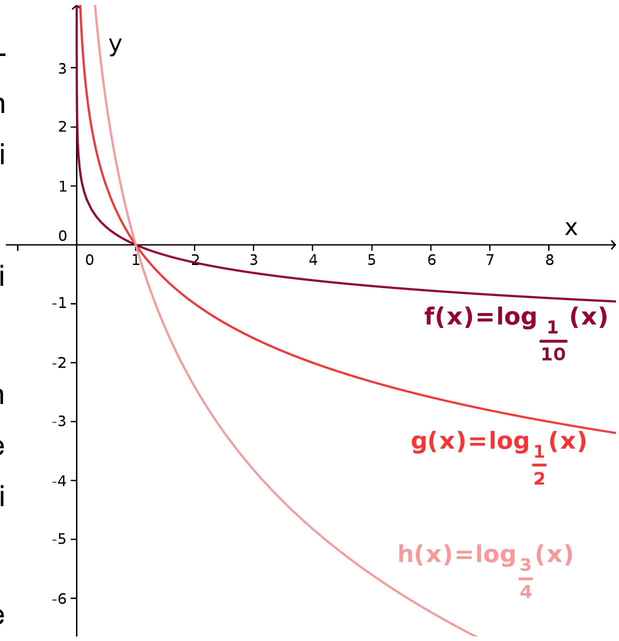
V isti koordinatni sistem narišimo grafe funkcij: $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$, $h(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$ in $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Tudi za te tri funkcije vemo, kakšne oblike so – padajoče, imajo navpično asimptoto pri $x = 0$ in vse tri imajo ničlo pri $(1; 0)$. Vse tri so tudi inverzi eksponentnih funkcij.

Pomagajmo si narisati grafe tako, da poiščemo, pri katerem x imajo vrednosti 1 in 2.

Spodaj so izračunane vrednosti, pri katerih posamezna funkcija zavzeme neko vrednost. Te vrednosti vrišemo v koordinatni sistem in nato skozi njih narišemo logaritemsko krivuljo.

Opazimo, da funkcije z manjšo osnovo počasneje padajo.



Slika 5: Zgled 14

$f(x) = -1$	$g(x) = -1$	$h(x) = -1$	$f(x) = -2$	$g(x) = -2$	$h(x) = -2$
$\log_{\frac{1}{10}} x = -1$	$\log_{\frac{1}{2}}(x) = -1$	$\log_{\frac{3}{4}} x = -1$	$\log_{\frac{1}{10}} x = -2$	$\log_{\frac{1}{2}}(x) = -2$	$\log_{\frac{3}{4}} x = 2$
$x = 10$	$x = 2$	$x = \frac{4}{3}$	$x = 100$	$x = 4$	$x = \frac{16}{9}$

Graf logaritemske funkcije $f(x) = k \cdot \log_a(x - p) + q$

ZGLED 15:

Za $f(x) = 2\log_3(x - 1) - 2$ zapišimo definicijsko območje (narišimo tudi pol) in ničlo. Graf funkcije tudi po korakih narišimo.

Logaritem obstaja samo za pozitivne argumente, zato je definicijsko območje določeno z neenačbo $x - 1 > 0$ in dobimo, da je $D_f: \{x > 1\}$. Navpična asimptota (pol) je zato $x = 1$.

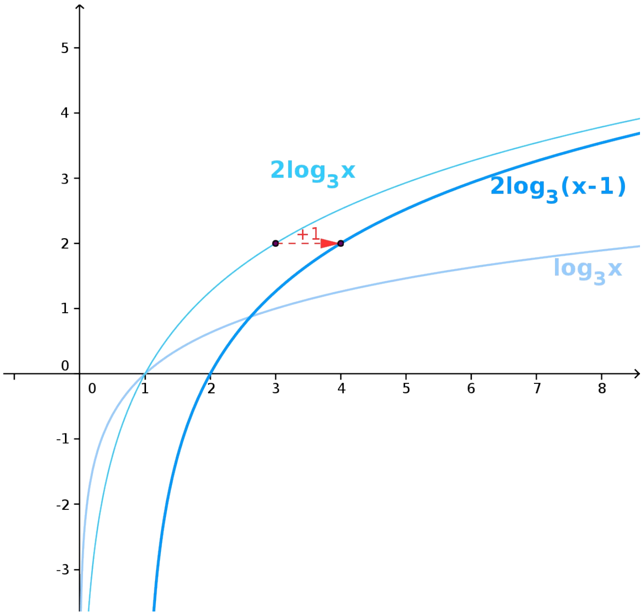
Ničlo izračunamo - pogoj $f(x) = 0$.

$2\log_3(x - 1) - 2 = 0$

$\log_3(x - 1) = 1$

$x - 1 = 3$

$x = 4$



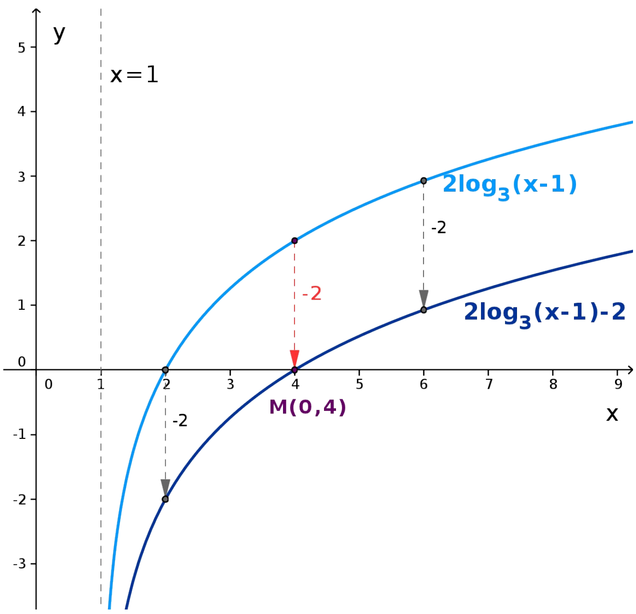
Slika 6: Zgled 15 (prva slika)

Osnovni graf je v tem primeru: $\log_3 x$.

Ker je $k = 2$, bo $\log_3 x$ za faktor 2 raztegnjen. Ker je $p = 1$, pa bo za 1 premaknjen desno (Slika 6).

Ker je faktor $q = -2$, še graf $2\log_3(x - 1)$ premaknemo za 2 navzdol in dobimo iskan graf $f(x) = 2\log_3(x - 1) - 2$.

Vrišemo še pol ($x = 1$) - črtkano in označimo ničlo grafa funkcije $f(x)$ $M(4; 0)$.



Slika 7: Zgled 15 (druga slika)

VAJE:

22. V isti koordinatni sistem narišite grafe logaritemskih funkcij.

    a) $f(x) = \log_2 x$

    b) $g(x) = \log_3 x$

    c) $h(x) = \log_5 x$

23. V isti koordinatni sistem narišite grafe logaritemskih funkcij.

    a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

    b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

    c) $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

24. V isti koordinatni sistem narišite grafe logaritemskih funkcij.

    a) $f(x) = \log_2 x + 1$

    b) $g(x) = \log_2 (x + 1)$

    c) $h(x) = 2\log_2 x$

25. V isti koordinatni sistem narišite grafe logaritemskih funkcij.

    a) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{3}} x$

    b) $g(x) = 2\log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$

    c) $h(x) = 2\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) + 2$

26. Za funkcijo $f(x) = \log_2 (x - 1)$ določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničlo in narišite njen graf. Določite presečišče funkcije $f(x)$ in premice $y = 3$ ter jo označite na grafu.

27. Za funkcijo $f(x) = \log_3 (x + 2)$ določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničlo in narišite njen graf. Določite presečišče funkcije $f(x)$ in premice $y = 2$ ter jo označite na grafu.

28. Funkciji $f(x) = 2^x - 2$ zapišite enačbo inverza ter oba narišite v koordinatni sistem.

29. Poiščite inverz funkcije $f(x) = 3^{(x-1)}$. Oba ($f(x)$ in $f(x)^{-1}$) narišite v istem koordinatnem sistemu.