REPUBLIKA SLOVENIJA | MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

TŠC Nova Gorica
BIOTEHNIŠKA ŠOLA

KONZORCIJ BIOTEHNIŠKIH ŠOL SLOVENIJE

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Eksponentna funkcija

Mišo Krog

Srednje strokovno izobraževanje: Kmetijski tehnik, tehniki

Modul: MATEMATIKA

Naslov: Eksponentna funkcija

Gradivo za 3.letnik SSI

Avtor: Mišo Krog

Strokovni recenzent: Janja Barber Rojc, prof. mat.

Lektor: Severin Drekonja, dipl. komp.

Šempeter pri Gorici, 2011

© Avtorske pravice ima Ministrstvo za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Biotehniška področja, šole za življenje in razvoj (2008-2012).

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina tega dokumenta v nobenem primeru ne odraža mnenja Evropske unije. Odgovornost za vsebino dokumenta nosi avtor.

Vsebina

Kazalo slik

Definicija

Če potenco zapišemo s pozitivno osnovo $a > 0$ in spremenljivko $x \in \mathbb{R}$ v eksponentu ter dodamo pogoj $a \neq 1$, tako dobljeno funkcijo:

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

imenujemo eksponentna funkcija.

Eksponentna funkcija - uvod

Primer: šah

Vsem dobro znana igra šah naj bi po eni izmed legend nastala v Indiji, kjer je vezir Sassa ibn Dahir izumil igro in jo pokazal kralju Šihramu. Kralj je bil nad igro tamko močno navdušen, da je vezirju obljubil karkoli si le-ta zaželi. Vezir je rekel: "Na prvo polje mi dajte eno pšenično zrno, na drugo dva, na tretje štiri, na četrto osem, na peto šestnajst ...". Kralj se je nasmejal in vezirju dejal, da je res skromen. A ko je ugotovil koliko je na zadnjem polju zrn žita, je uvidel, da njegovo kraljestvo ni tako bogato, da vezirju ustreže.

Hitro vidimo, da lahko zapišemo število pšeničnih zrn na vsakem polju tako:

polje		zrna
1	2^0	1
2	2^1	2
3	2^2	4
4	2^3	8
5	2^4	16
6	2^5	3
⋮	⋮	⋮

Na 64. polju bi bilo tako 2^{63} zrn žita, kar znese: 9 223 372 036 854 775 872 zrn. Seveda kralj ni imel zrn v celem kraljestvu niti približno toliko. (To je približno 410 000 000 000 ton žita na zadnjem polju.)

Ko bomo zvedeli malo več o eksponentni funkciji, bomo rast števila žit zapisali takole:

$$f(x) = 2^{(x-1)}$$

kjer x teče od 1 do 64 in predstavlja zaporedno število polja na šahovnici. Na vsakem polju se število zrn poveča za faktor 2, kar pomeni, da je na vsakem polju dvakrat več zrn žita, kot pa jih je bilo na prejšnjem.

Število zrn žita na poljih šahovnice se povečuje **eksponentno**.

Primer: bakterije

Za bakterije pravimo, da rastejo z *binarno delitvijo* (se delijo na pol). To se dogaja v za bakterije zelo hranljivem okolju v drugi fazi (izmed treh) v njihovem razmnoževanju. *Generacijski čas* je čas, ko se bakterija razdeli na pol in je ponavadi 60 minut.

Podobno kot prej bi lahko preračunavali, koliko bo sedaj ob določenem času bakterij v kulturi. Zapišimo zvezo za rast bakterij, če jih je na začetku le 15.

Po pretečeni eni uri bo bakterij $15 \cdot 2$,

po pretečenih dveh urah bo bakterij $15 \cdot 2 \cdot 2$

itd ...

Iskana zveza je (ker se število bakterij v vsaki uri podvoji glede na število bakterij uro poprej, zato je faktor povečave števila bakterij $= 2$)

$$f(t) = 15 \cdot 2^t$$

kjer t pomeni čas v urah, $f(t)$ pa torej število bakterij po t urah.

Npr: po 10 urah bo v kulturi bakterij $f(10) = 15 \cdot 2^{10} = 15360$ bakterij. Pravimo da število bakterij raste **eksponentno**.

Primer: pogozdovanje

V gozdovih je prirastek p (v $\%$) lesa (na letni ravni) približno 3%. Kadar izmerimo trenutno količino lesa v gozdu, se da napovedati približna količina lesa v gozdu za vnaprej. To napovemo s pomočjo eksponentne funkcije:

$$f(t) = z_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot t},$$

kjer je z_0 začetna količina lesa, t je število let, za katere želimo napovedati, e je konstanta (naravno število približno $2,718\ldots$).

Tako na primer pri gozdu z začetnim stanjem $z_0 = 15000 m^3$ po 15 letih lahko pričakujemo:

$$f(15) = 15000 \cdot e^{\frac{3}{100} \cdot 15} = 23525 m^3.$$

Tudi za rast količine lesa v gozdu pravimo, da raste **eksponentno**.

Eksponentno rast srečamo še marsikje: pri cepitvi jedra atoma (jedrska reakcija), gostoti svetlobnega toka, številu naprav, povezanih v internet, razmnoževanju nekaterih vrst živali,...

Družina funkcij $f(x) = a^x;\ a > 1$

Kot smo že pri definiciji eksponentne funkcije dejali, je le ta podana za osnove $a \in \mathbb{R}$, kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$. V primeru, da je $a = 1$, imamo $f(1) = 1^x = 1$, kar pa je konstantna funkcija $y = 1$.

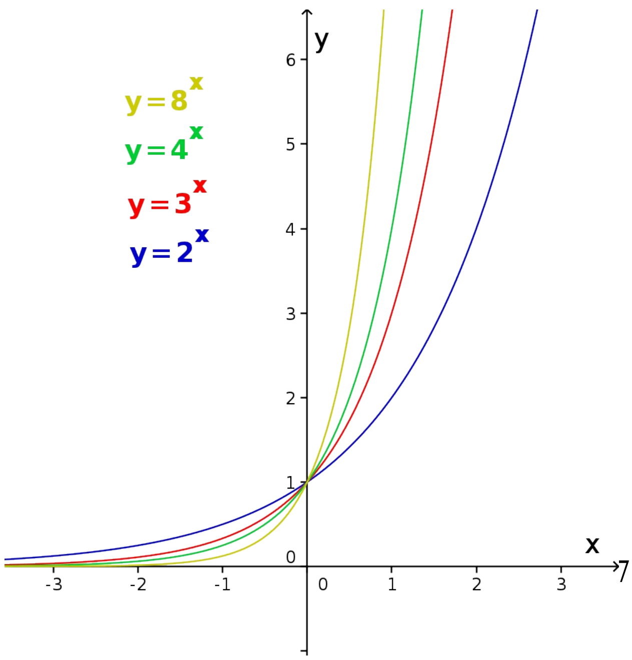
Oglejmo si lastnosti funkcij $f(x) = a^x$, ko je $a > 1$.

- Za katerikoli $x \in \mathbb{R}$ in $a > 1$ so funkcije **strogo naraščajoče**, zgornje meje pa nimajo.
- Če je $x = 0$, je za vsako funkcijo oblike $f(x) = a^x$ funkcijska vrednost $f(0) = a^0 = 1$. Zato je **začetna vrednost** $N(0; 1)$ za vse $f(x) = a^x$.
- Vse funkcije imajo spodnjo mejo 0, ki je nikoli ne dosežejo, saj za katerikoli $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0$. To pomeni, da je **zaloga vrednosti**: $Z_f = \mathbb{R}^+$.
- Ker lahko za katerikoli $x \in \mathbb{R}$ izračunamo $f(x)$, pravimo, da je definirana povsod: $D_f = \mathbb{R}$.
- Abcisni osi pravimo **vodoravna asimptota** funkcije $f(x)$ (asimptota – premica, h kateri se funkcijske vrednosti približujejo, ko gre x proti $-\infty$).
- Graf funkcije je konveksna krivulja.

Izluščimo pomembne ugotovitve za risanje grafov eksponentne funkcije.

Ko je $x \in \mathbb{R}$ negativen, vrednosti $f(x) = a^x$ tem večji kot je a, počasneje naraščajo. Ko pa $x \in \mathbb{R}$ preide iz negativnih v pozitivna števila, pa vrednosti $f(x) = a^x$, tem večji kot je a, hitreje naraščajo. Vsa družina $y = a^x$ pa poteka skozi začetno vrednost $N(0; 1)$.

Slika 1 prikazuje zgoraj povedano. Npr: graf



Slika 1: Naraščanje eksponentnih funkcij

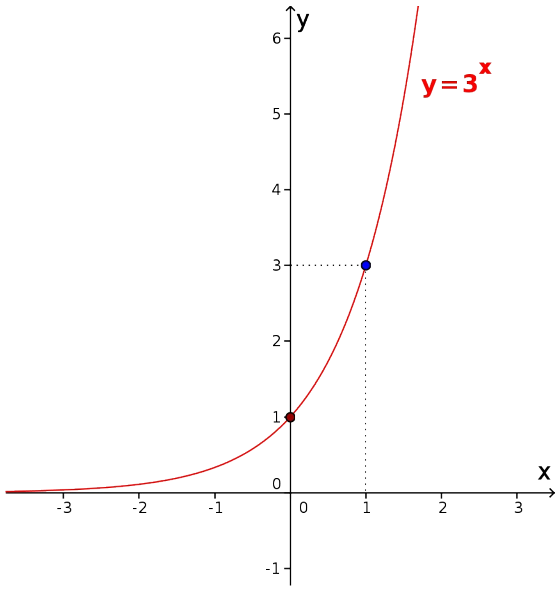
funkcije $f(x) = 2^x$ (moder graf) je desno od ordinatne osi pod grafom funkcije $f(x) = 3^x$ (zelen graf), na levi ordinatne strani osi - tam je $x < 0$, pa je pod njim. Grafi vseh štirih narisanih funkcij pa gredo skozi točko $N(0; 1)$.

Naredimo še nekaj zgledov:

ZGLED 1:

Zapišite predpis eksponentne funkcije $f\,(x) = a^x$, ki gre skozi točko $A(3; 27)$, in narišite njen graf.

Iz enačbe eksponentne funkcije ($y = a^x$) in podane točke $A(3; 27)$ sestavimo zvezo $27 = a^3$; saj iz točke vidimo, da pri vrednosti $x = 3$ zavzame a^x vrednost 27.



Slika 2: Zgled 1

Izračunamo:

$a^3 = 27$

$a = 3$, saj je $3^3 = 27$

Iskani predpis je:

$$f\,(x) = 3^x$$

Narišemo še $y = 3^x$ s pomočjo tabeliranja:

x	3^x
¡ 1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9

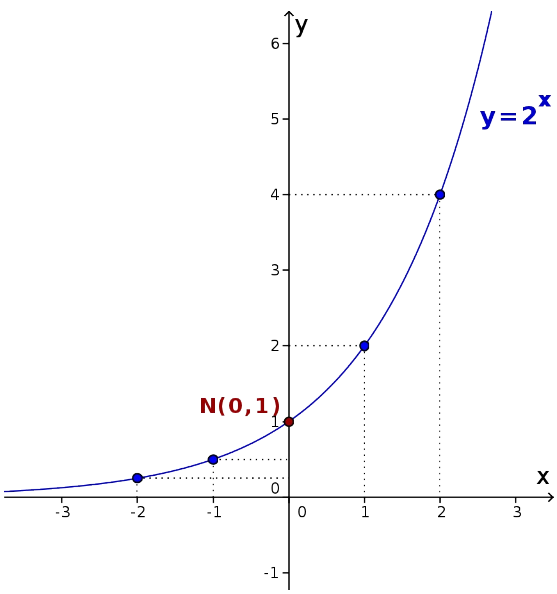
ZGLED 2:

V koordinatni sistem narišite graf funkcije $f\,(x) = 2^x$. Zapišite zalogo vrednosti in označite začetno vrednost.

Funkcijo tabeliramo:

x	2^x
¡ 2	$\frac{1}{4}$
¡ 1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
2	8

in vrišemo točke v koordinatni sistem.



Slika 3: Zgled 2

Zaloga vrednosti je: $Z_f = R^+$.

Začetna vrednost pa je točka: $N(0; 1)$.

A Število e

Iracionalna konstanta e je približek vsote izraza $(1+\frac{1}{n})^n$, ko $n \in \mathbb{N}$ teče v neskončno. Včasih jo imenujemo tudi Eulerjeva konstanta, po znanem švicarskem matematiku Leonhardu Eulerju. Približna vrednost konstante:

$$e = 2{,}718\ldots$$

VAJE:

1. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = 3^x$

   b) $g(x) = 6^x$

2. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = 2^x$

   b) $g(x) = 4^x$

3. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

   b) $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

4. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = e^x$

   b) $g(x) = 2^x$

   c) $h(x) = 4^x$

5. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

   b) $g(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^x$

6. Zapišite predpis funkcije $f(x) = a^x$, ko gre njen graf skozi $A(2; 2{,}25)$

7. Zapišite predpis funkcije $f(x) = a^x$, ko gre njen graf skozi $A(-2; \frac{1}{25})$

8. Zapišite predpis funkcije $f(x) = a^x$, ko velja.

   a) $f(2) = 6\frac{1}{4}$

   b) $f(\frac{1}{3}) = 3$

   c) $f(-2) = \frac{9}{49}$

d) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 8$

Družina funkcij $f(x) = a^x$; $0 < a < 1$

Pri definiciji eksponentne funkcije smo tudi dejali, da za osnovo $a\ 2\ R$ velja, da je $a > 0$ in $a\ 6\!= 1$. V prejšnjem razdelku smo obravnavali eksponentne funkcije, ko je bil $a > 0$, sedaj pa preglejmo še tiste, kjer je $0 < a < 1$.

Oglejmo si lastnosti funkcij $f(x) = a^x$, ko je $0 < a < 1$.

F Za katerikoli $x\ 2\ R$ in $0 < a < 1$ so funkcije **strogo padajoče**, zgornje meje nimajo.

F Če je $x = 0$, je za vsako funkcijo oblike $f(x) = a^x$ funkcijska vrednost $f(0) = a^0 = 1$. Zato je **začetna vrednost** $N(0; 1)$ za vse $f(x) = a^x$.

F Vse funkcije imajo spodnjo mejo 0, ki je nikoli ne dosežejo, saj za katerikoli $x\ 2\ R$ $f(x)\ 6\!= 0$. To pomeni, da je **zaloga vrednosti**: $Z_f = R^+$.

F Ker lahko za katerikoli $x\ 2\ R$ izračunamo $f(x)$, pravimo, da je definirana povsod: $D_f = R$.

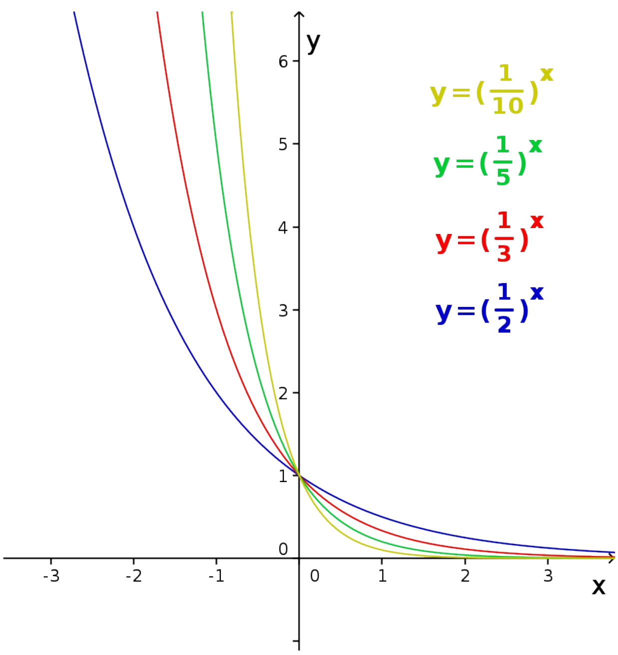
F Abcisni osi pravimo **vodoravna asimptota** funkcije $f(x)$ (asimptota – premica h kateri se funkcijske vrednosti približujejo, ko gre x proti 1).

F Graf funkcije je konveksna krivulja.

Izluščimo pomembne ugotovitve za risanje grafov eksponentne funkcije.

Ko je $x\ 2\ R$ negativen, vrednosti $f(x) = a^x$; tem bližje je a številu 1, <u>hitreje</u> padajo (večja je sprememba po ordinati na vsako enoto premika). Ko pa $x\ 2\ R$ preide iz negativnih v pozitivna števila, pa vrednosti $f(x) = a^x$, tem bližje je a številu 0, <u>hitreje</u> se približujejo vodoravni asimptoti. Vsa družina $y = a^x$ pa poteka skozi začetno vrednost $N(0; 1)$.

Slika 1 prikazuje zgoraj povedano. Npr: graf



Slika 4: Padanje eksponentnih funkcij

funkcije $f(x) = 2^x$ (moder graf) je desno od ordinatne osi pod grafom funkcije $f(x) = 3^x$ (zelen graf), na levi ordinatne strani osi - tam je $x < 0$, pa je pod njim. Grafi vseh štirih narisanih funkcij pa gredo skozi točko $N(0; 1)$

ZGLED 3:

V koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Zapišite zalogo vrednosto in označite začetno vrednost.

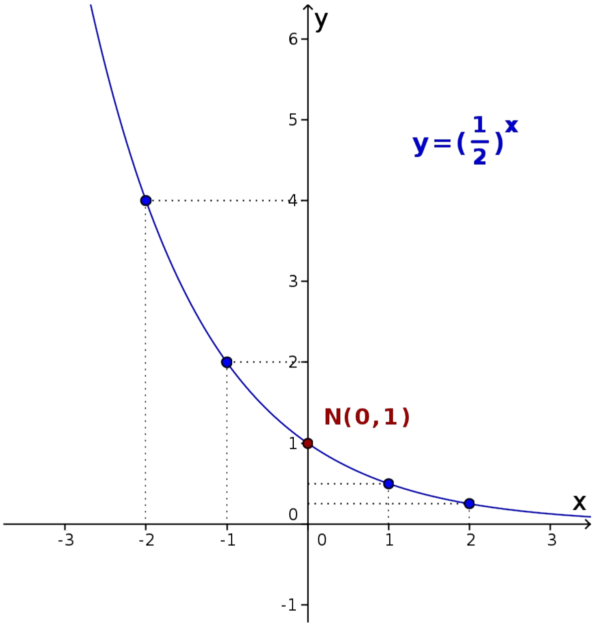
Funkcijo tabeliramo:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

In vrišemo točke v koordinatni sistem.

Zaloga vrednosti je: $Z_f = \mathbb{R}^+$.

Začetna vrednost pa je točka: $N(0; 1)$.

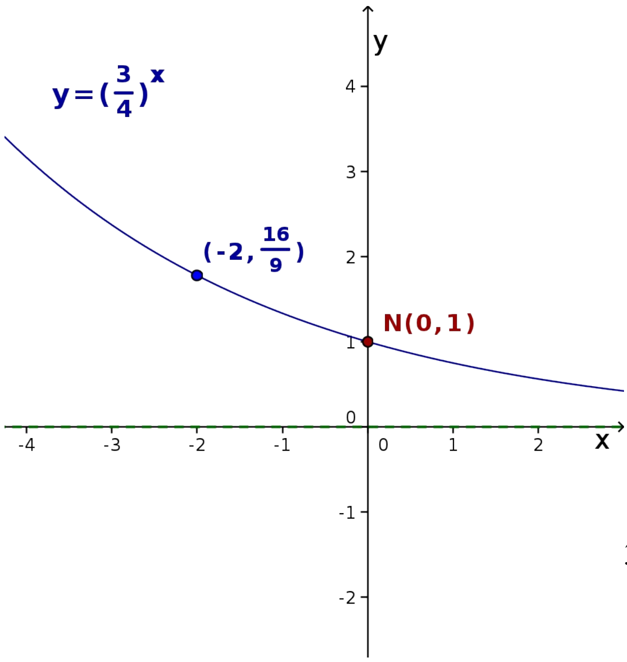


Slika 5: Zgled 3

ZGLED 4:

Zapišite predpis eksponentne funkcije $f(x) = a^x$, za katero velja $f(-2) = 1\frac{7}{9}$.

Iz pogoja $f(-2) = 1\frac{7}{9}$ in splošnega predpisa eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ sestavimo enačbo in poiščemo $a \in \mathbb{R}$:



Slika 6: Zgled 4

$$\frac{1}{a^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{16}$$

$$a^2 = \frac{9}{16}$$

$$a = \pm\frac{3}{4}$$

Pravilna rešitev je $a = +\frac{3}{4}$, saj mora biti $a > 0$.

Iskani predpis je: $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

VAJE:

9. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

   b) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

10. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

    b) $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

11. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

    b) $g(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$

12. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

    b) $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

13. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

    b) $g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$

14. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = 2^x$

    b) $g(x) = 2^{-x}$

15. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = 3^x$

    b) $g(x) = 3^{-x}$

16. Zapišite predpis funkcije $f(x) = a^x$, ko velja.

    a) $f(-\frac{3}{2}) = 8$

    b) $f(-2) = 6\frac{1}{4}$

    c) $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

    d) $f(3) = \frac{1}{9}$

17. Zapišite predpis funkcije $f(x) = a^x$, ko gre njen graf skozi $A(-\frac{3}{2}; 27)$.

Graf eksponentne funkcije $f(x) = k \cdot a^{x-p} + q$, $a > 0$, $a \neq 1$

Do sedaj smo imeli opravka z grafi eksponentnih funkcij $f(x) = a^x$. Tak graf je pa lahko poljubno premaknjen oz. raztegnjen v koordinatnem sistemu.

Obravnavajmo torej eksponentno funkcijo:

$$f(x) = ka^{x-p} + q$$

v odvisnosti od koeficientov $k, p, q \in \mathbb{R}$ $k \neq 0$.

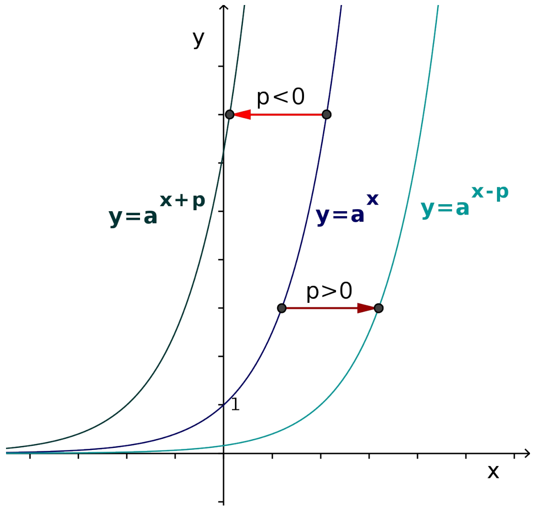
F Pomen koeficienta p

Od koeficienta p je odvisno, kako (in koliko enot) je osnoven graf a^x premaknjen v smeri abcisne osi.

Če je $p > 0$, gre za premik p enot <u>desno</u> (glede na osnovno lego grafa a^x).

Če je $p < 0$, gre za premik p enot <u>levo</u> (glede na osnovno lego grafa a^x).

Glej sliko 7.



Slika 7: Koeficient p

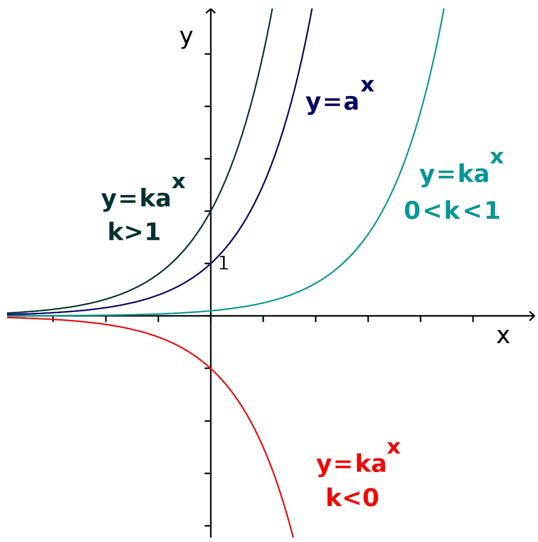
F Pomen koeficienta k

Koeficient k vpliva na skrčitev, razteg in zrcaljenje čez abcisno os. Lahko ločimo:

Če je k<0, je osnovni graf a^x zrcaljen čez abcisno os - ka^x je negativen.

Če je $0 < |k| < 1$, potem graf ka^x skrčimo v smeri ordinatne osi (postane bolj položen kot a^x).

Če je $|k| > 1$, potem pa graf ka^x raztegnemo v smeri



Slika 8: Koeficient k

ordinatne osi (postane bolj strm kot a^x).

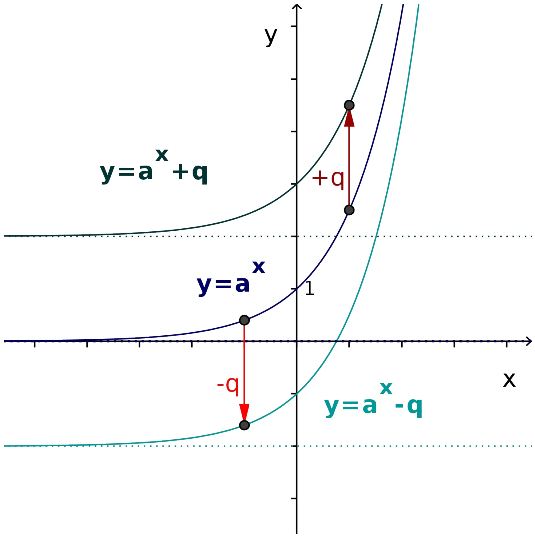
Glej sliko 8.

F Pomen koeficienta q

Koeficient q osnoven graf premakne bodisi za q enot navzgor bodisi za q enot navzdol. Poglejmo:

Če je $q > 0$, se točke osnovnega grafa a^x premaknejo za q enot navzgor (navzgor se premakne vodoravna abcisa, ki postane sedaj $y = q$).

Če je $q < 0$, se točke osnovnega grafa a^x premaknejo za q enot navzdol (vodoravna abcisa postane sedaj premica $y = q$).



Slika 9: Koeficient q

Glej sliko 9.

ZGLED 5:

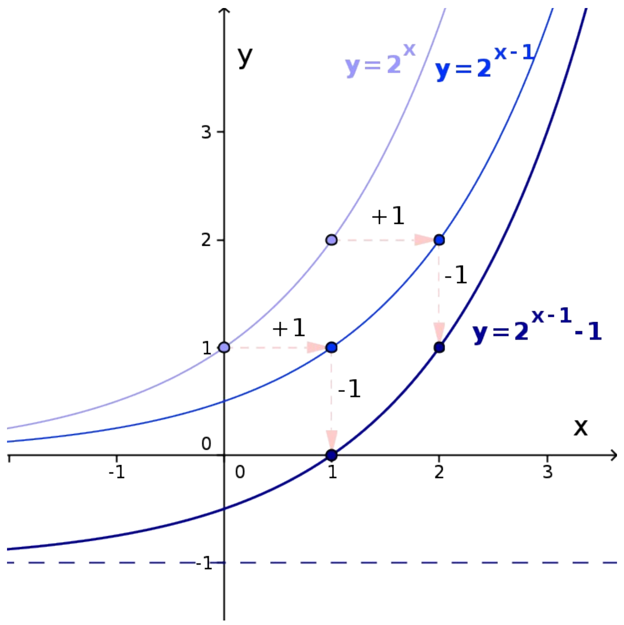
S premiki narišimo graf funkcije $f(x) = 2^{x-1} - 1$.

Najprej narišimo graf funkcije 2^x (lahko tudi z tabeliranjem).

Dobimo narisan iskan graf funkcije $f(x) = 2^{x-1} - 1$.

Potem ta graf premaknemo za eno enoto desno ($p = 1$). Tako imamo narisan graf $f(x) = 2^{x-1}$.

Nato še graf 2^{x-1} premaknemo za eno enoto navzdol ($q = 1$).



Slika 10: Zgled 5

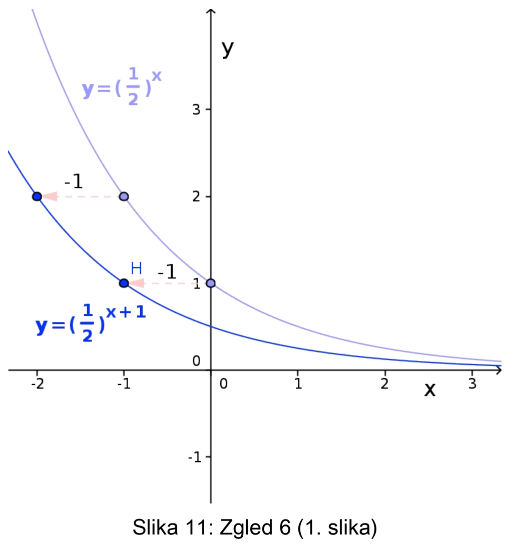
[ZGLED 6]():

Po korakih narišite graf funkcije $f(x) = -3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 3$ (vsak premik grafa v svoj koordinatni sistem).

Izpišemo koeficiente: $k = -3,\ p = -1,\ q = 3.$

Narišemo najprej $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ v koordinatni sistem in ga nato prestavimo za eno enoto v levo, ker je $p = -1.$

(Slika 11)



Slika 11: Zgled 6 (1. slika)

Potem tako dobljen graf $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ zrcalimo čez abcisno os in raztegnemo za faktor 3, ker je $k = -3$. Dobimo graf:

$-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

Za natančno risanje si lahko pomagamo z izračunom točk. Npr: $x = 0; y = -3(\frac{1}{2})^{0+1} = -\frac{3}{2}$.

(Slika 12)

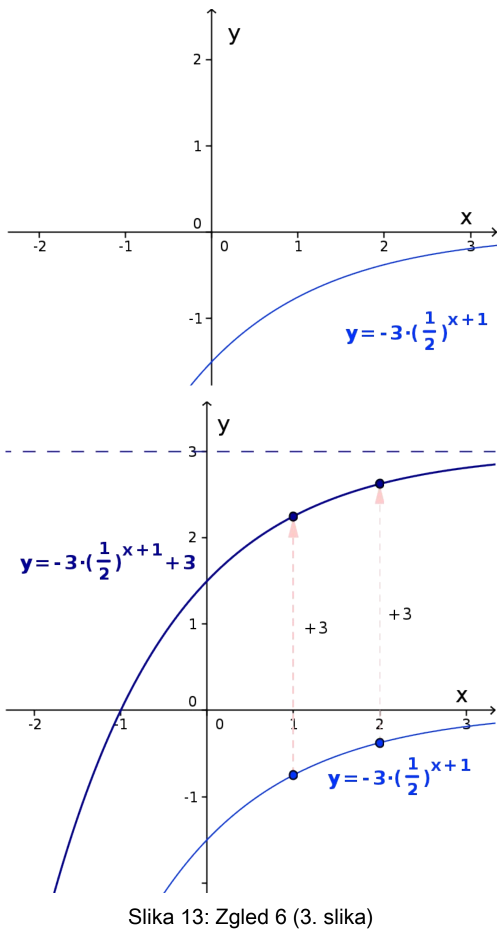
Graf $-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ še premaknemo za tri enote navzgor, saj je $q = 3$. Tako dobimo naš iskani graf:

$$f(x) = -3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 3.$$

(Slika 13)

Izračunamo še kakšno točko na grafu. Npr: $f(1) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} + 3 = 2\frac{1}{4}$.

Narišemo še asimptoto y=3 (črtkana vodoravnica).



Slika 13: Zgled 6 (3. slika)

VAJE:

18. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

    a) $f(x) = 2^{x}$

    b) $g(x) = 2^{x+1}$

    c) $h(x) = 2^{x} + 1$

    d) $j(x) = 3 \cdot 2^{x}$

19. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

    a) $f(x) = 3^{x}$

    b) $g(x) = 3^{x-2}$

    c) $h(x) = -3^{x-2}$

    d) $j(x) = -3^{x-2} + 1$

20. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

    a) $f(x) = 2^{-x} + 1$

    b) $g(x) = -2{,}5 \cdot 2^{-x}$

    c) $h(x) = 2^{-x+1}$

21. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

    a) $f(x) = 4^{-x}$

    b) $g(x) = 4^{-x-2}$

    c) $h(x) = 4^{-x-2} - 2$

    d) $j(x) = -2 \cdot 4^{-x-2} - 2$

22. Za funkcijo $f(x) = 3^{x+1} - 2$ zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti, enačbo asimptote in narišite njen graf.

    Izračunajte tudi:

    $f(-3) + f(-2) + f(-1)$.

23. Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{x-2} + 1$ zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti in narišite njen graf.

24. Za funkcijo $f(x) = -2^{-x-1} + 2$ zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti, enačbo asimptote in narišite njen graf.

    V isti koordinatni sistem narišite še $g(x) = |f(x)|$.

25. Za funkcijo $f(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} + 3$ zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti, enačbo asimptote in narišite njen graf.

    V isti koordinatni sistem narišite še $g(x) = |f(x)|$.

Eksponentne enačbe

Enačbo, v kateri neznanka nastopa v eksponentu, uvrščamo v skupino eksponentnih enačb. Eksponentne enačbe razdelimo na tri skupine.

Enačbe oblike $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Če sta osnovi, ki nastopata v enačbi, enaki (oz. če se enačbo da preurediti tako, da nastopa na levi in desni strani ena potenca z enako osnovo), potem pomeni, da bo enakost veljala tedaj, kadar bosta enaka tudi eksponenta. V tem primeru rešujemo:

$$f(x) = g(x)$$

ZGLED 7:

Rešite enačbo $2^{2x+1} = 8^x$.

Desno stran enačbe preuredimo in dobimo enačbo:

$$2^{2x+1} = 2^{3x}.$$

Opazimo da bo za enačbo z enakimi osnovami veljala enakost le takrat, ko bosta tudi eksponenta enaka. In rešimo:

$$2x + 1 = 3x$$

$$x = -1.$$

ZGLED 8:

Rešite enačbo $3^{x+1} - 25 = 2 \cdot 3^{x-2}$.

Enačbo najprej malo preuredimo v:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25;$$

na levi strani izpostavimo 3^{x-2}:

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$$

Delimo enačbo z 25 in upoštevamo dejstvo, da je $a^0 = 1$:

$$3^{x-2} = 3^0;$$

rešimo sedaj:
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2.$$

Enačbe oblike $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Pri enačbah, v katerih sta (npr. po preoblikovanju enačbe) osnovi različni in eksponenta enaka, je rešitev lahko le:
$$f(x) = 0.$$

Za družino eksponentnih funkcij a^x smo dejali, da imajo enako začetno vrednost, torej se sekajo v točki $N(0; 1)$.

Obe funkciji $a^{f(x)}$ in $b^{f(x)}$ bosta imeli vrednost 1 natanko takrat, ko bo eksponent enak 0.

ZGLED 9:

Rešite enačbo $3^{x+1} = 3 \cdot 2^x$.

Enačbo najprej delimo z 3 in dobimo:
$$3^{x+1} : 3 = 2^x$$
$$3^x = 2^x.$$

Ko bo $x = 0$ (eksponent), saj le takrat potekata grafa eksponentnih funkcij skozi enako točko.

ZGLED 10:

Rešite enačbo $5^{2x+3} - 4 \cdot 3^{2x+1} = 2 \cdot 3^{2x+3} + 3 \cdot 5^{2x+1}$.

Potence z enakimi osnovami uredimo na isto stran:
$$5^{2x+3} - 3 \cdot 5^{2x+1} = 2 \cdot 3^{2x+3} + 4 \cdot 3^{2x+1}.$$

Izpostavimo skupni faktor na vsaki strani:
$$5^{2x+1}(5^2 - 3) = 3^{2x+1}(2 \cdot 3^2 + 4)$$
$$22 \cdot 5^{2x+1} = 22 \cdot 3^{2x+1}.$$

Delimo z 22 in rešimo enačbo:
$$5^{2x+1} = 3^{2x+1}.$$

Rešimo enačbo:

$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}.$$

in tako dobimo rešitev enačbe $5^{2x+3} - 4 \cdot 3^{2x+1} = 2 \cdot 3^{2x+3} + 3 \cdot 5^{2x+1}$.

Enačbe oblike $a^{f(x)} = c$

Rešitev enačbe, kjer je na eni strani enačbe konstanta, ki ni potenca števila a, rešujemo (za sedaj) grafično. Ko bomo spoznali logaritme, bomo znali rešiti enačbo s pomočjo le-teh.

ZGLED 11:

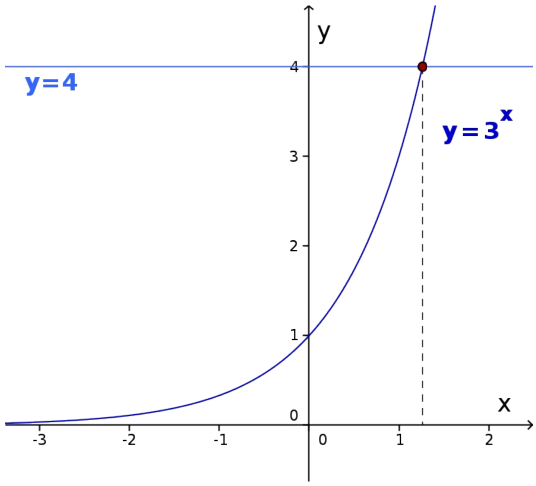
Rešite enačbo $3^x = 4$.

Pomagamo si z grafom, na katerega narišemo:

- eksponentno funkcijo $y = 3^x$ in
- premico $y = 4$.

Rešitev je abcisa presečišča.

Odčitamo približno vrednost: $x = 1{,}3$.



Slika 14: Zgled 11

ZGLED 12:

Rešite enačbo $3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 0$ z uvedbo nove spremenljivke.

Najprej člen 3^{x+1} preuredimo v $3 \cdot 3^x$ in zapišemo enačbo:

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Neznanka v prvem členu je pomnožena z 2, osnovi prvega in drugega člena sta enaki in izberemo za novo spremenljivko:

$$t = 3^x.$$

Dobimo kvadratno enačbo:

$$t^2 - 3t + 3 = 0$$
$$(t - 1)(t - 3) = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 3.$$

Ločimo:

za t_1: rešimo $1 = 3^x$

dobimo $x_1 = 0$;

za t_2: rešimo $3 = 3^x$

dobimo $x_2 = 1$.

VAJE:

26. Rešite naslednje enačbe.

a) $2^{3x} \cdot 2^{x+1} = 128$

b) $2^x - 4^{x/2-1} = 3 \cdot 2^{2x+1}$

c) $2^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 9 \cdot 4^x$

d) $5\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-x} = \frac{33}{16}\left(\frac{16}{9}\right)^{-x+2}$

e) $7 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 4^{x-1}$

27. Rešite naslednje enačbe.

a) $7^{x-1} + 3^{2x-4} = 3^{2x-2} - 7^{x-2}$

b) $2^{x+2} - 2^x = 3^{x+1} - 3^x$

c) $6 \cdot 2^{2x} + 17 \cdot 7^{2x-6} + 2^{2x-3} = 7^{2x-4}$

d) $2^{3x} - 4 \cdot 5^{3x-4} + 5 \cdot 2^{3x-2} = 4 \cdot 2^{3x}$

e) $4^{2x} - 3^{2x} = 3^{2x-1}$

28. Grafično rešite naslednje enačbe.

a) $3^x = 7$

b) $2^{x-1} = 3$

c) $4^{-x} = 2x + 1$

d) $2^{-x+1} = x$

e) $3^x + 2 = x - 1$

29. Rešite enačbe z uvedbo nove neznanke.

a) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

b) $16^x + 16 = 17 \cdot 2^{2x}$

c) $3^{2x} = 4 \cdot 3^{x+1} - 27$